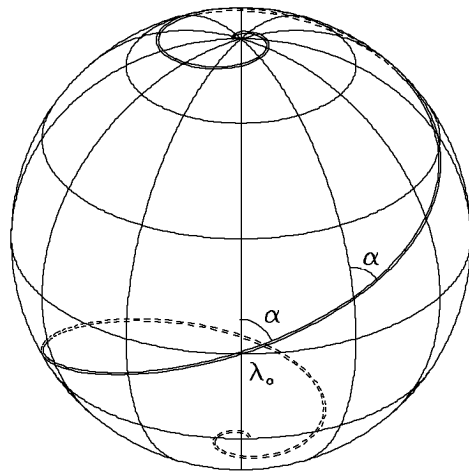


KAZIMIERZ M. BORKOWSKI

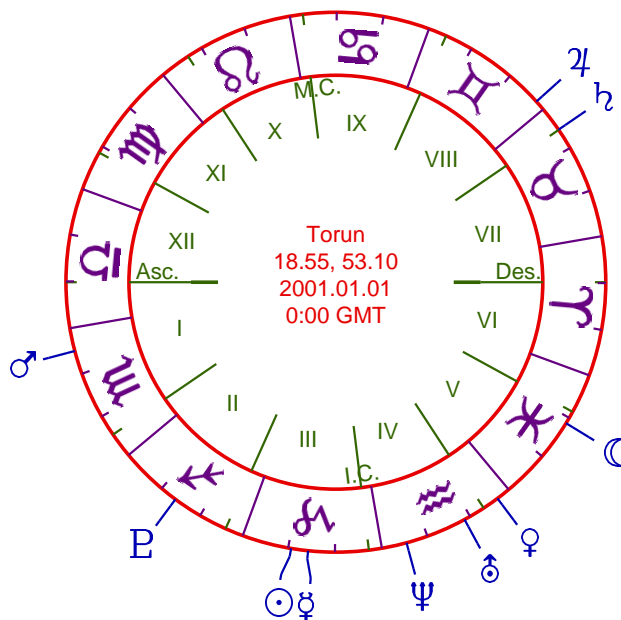
**ASTRONOMICZNE
OBLICZENIA**
nie tylko dla geografów



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA
TORUŃ 1991

Mandala horoskopu miasta Torunia na XXI w.

Ilustracja do Przykładu 7.6 ze str. 126; z prawej strony widnieją
długości ekliptyczne planet wyrażone w stopniach



☉	<i>Slonce</i>	280.63
☾	<i>Ksiezyc</i>	348.70
☿	<i>Merkury</i>	284.28
♀	<i>Wenus</i>	326.96
♂	<i>Mars</i>	214.94
♃	<i>Jowisz</i>	62.19
♄	<i>Saturn</i>	54.59
♅	<i>Uran</i>	318.65
♆	<i>Neptun</i>	305.35
♇	<i>Pluton</i>	253.71

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA
SKRYPTY I TEKSTY POMOCNICZE

KAZIMIERZ M. BORKOWSKI

ASTRONOMICZNE OBLICZENIA
NIE TYLKO
DLA GEOGRAFÓW

*Niniejsza elektroniczna wersja skryptu została przygotowana w 2008 r.
i różni się od pierwotnie opublikowanej uaktualnieniami tabeli czasu
letniego (do 2012 r., na str. 50) i spisu literatury oraz dodanym
rysunkiem mandali horoskopu na II stronie okładki*



TORUŃ 1991

Recenzenci

Stefania Grudzińska, Barbara Kołaczek

ISBN 83-231-0251-1

ZP UMK, zam. 1/91, obj. 7,5 ark. wyd., nakład + 60 egz., cena zł 6000,-

To, co świat ceni w nauce (*tao*), to są księgi. A książki to tylko słowa. A co jest cennego w słowach — to myśl (którą wyrażają). Myśl ma coś, za czym się podąża, ale tego nie można przekazać słowami. Świat przekazuje księgi właśnie z powodu cennych słów. I chociaż świat je ceni, nie są tego godne, bo to, dla czego są szacowane, nie jest naprawdę wartościowe.

To, co wzrokiem można zobaczyć, to są barwy i kształty. To, co słuchem można usłyszeć, to są tylko nazwy i dźwięki. Szkoda, że ludzie tego świata uważają kształty, barwy, słowa i dźwięki za wystarczające do osiągnięcia obiektywnej rzeczywistości. Otóż kształty, barwy, nazwy i dźwięki nie wystarczają do tego. I dlatego też „wiedzący nie mówi, mówiący nie wie”. Ale jakżeż świat ma to sobie uświadomić?

Czuang–tsy
*Prawdziwa Księga południowego
kwiatu* (Dziwisz 1988, s. 115)

Uwagi wstępne

Przedstawiane opracowanie jest uzupełnieniem istniejących podręczników do przedmiotu *Astronomiczne podstawy geografii* i nie powinno być traktowane przez Studenta jako podstawowy materiał. Z jednej strony nie obejmuje ono całości wykładanego materiału, a z drugiej znaczna część przekazywanej tu wiedzy nie jest w istocie wymagana do zaliczenia przedmiotu. Skrypt ten przygotowałem w oparciu o doświadczenia zdobyte podczas mojej kilkunastoletniej pracy ze studentami oraz w czasie prac badawczych w Instytucie Astronomii i Katedrze Radioastronomii Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Zawiera on algorytmy i przykłady na ogół sprawdzone w praktycznych zastosowaniach.

Większość przykładów, które umieściłem na końcach rozdziałów, jest oryginalna a wszystkie przeliczyłem osobiście, aby mieć pewność, że Student śledząc tok rozwiązywania nie napotka na nieścisłości albo wręcz błędną interpretację wzorów (a tego typu przypadki znajdowałem niejednokrotnie u innych autorów zbiorów zadań; z własnego doświadczenia wiem również bardzo dobrze jak łatwo popełniać błędy nawet mimo ogólnej znajomości danego zagadnienia). Rzadko tylko posługiwałem się tablicami matematycznymi preferując raczej kalkulator elektroniczny lub komputer osobisty.

W rozdz. 1 zebrałem najważniejsze wzory trygonometrii płaskiej i sferycznej, które przydają się przy rozwiązywaniu nowych problemów astronomii sferycznej (rozdz. 2), wyznaczeniach współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji (4), astronawigacji (5) i mechaniki nieba (rozdz. 6). Poza najważniejszymi zależnościami trygonometrii sferycznej materiał z pierwszego rozdziału nie jest normalnie wykładany na *Astronomicznych podstawach*. Również niektóre z zagadnień szczegółowych z pozostałych rozdziałów nie ujmuję się w regularnym kursie. Myślę jednak, że Student z ciekawością zapozna się z nimi, a uznałbym to za swój sukces, gdyby dało to początek Jego nowego zainteresowania. Kilka nietrywialnych bądź pożytecznych algorytmów przedstawiłem w postaci gotowych programów w języku FORTRAN (na IBM PC). Mam nadzieję, że przez niekonwencjonalną i pogłębioną prezentację wielu zagadnień praca ta zainteresuje nie tylko geografów ale także grono astronomów. Moznaby ją polecać, na przykład, studentom astronomii jako materiał uzupełniający do pierwszej części przedmiotu *Astronomia ogólna*.

Pierwsza wersja tego opracowania była opiniowana przez recenzentów: doc. dr hab. Stefanę Grudzińską i prof. dr hab. Barbarę Kołaczek. Dzięki ich licznym krytycznym uwagom, które starałem się uwzględnić przy ponownej redakcji, skrypt zyskał istotnie na wartości (i objętości). Wyrażając w tym miejscu wdzięczność za konstruktywną krytykę chcę jednocześnie uwolnić recenzentów od odpowiedzialności za wszelkie uchybienia tak merytoryczne jak i natury technicznej, które niewątpliwie występują w niniejszej rozszerzonej, a nie recenzowanej już wersji. W stosunku do pierwotnej wersji są tu np. całkowicie nowe punkty (2.2, 3.8, 4.4 i 6.7), przykłady (4.8 i 6.6), prawie wszystkie rysunki (prócz 1.1 i 1.2) i wiele uzupełnień w innych miejscach, w szczególności w rozdz. 2 i 3. Chcę także podziękować dr Alojzemu Burnickiemu, który w ostatniej chwili uchronił tą postać skryptu (ściślej: rozdz. 2 – 6) od rozlicznych błędów typograficznych i stylistycznych, a także kilku błędów rzeczowych.

Ponieważ publikacja ta, przynajmniej formalnie, jest przeznaczona jako pomoc dla studentów geografii, na miejscu będzie kilka zdań na temat odnośnego przedmiotu. Na toruńskiej Uczelni na kurs *Astronomicznych podstaw geografii* przeznaczono 15 godzin wykładu i tyleż ćwiczeń w pierwszym semestrze I roku studiów. W te wąskie ramy czasowe należy wtłoczyć cały materiał przedmiotu. Zakres tematyczny ustaliłem w po-

rozumieniu z radą pedagogiczną Instytutu Geografii, co pozwoliło wyeliminować niektóre z tematów, które znalazły się na innych kursach (np. na geologii wykładano budowę Ziemi i jej atmosfery), na korzyść tych oczekiwanych przez grono pedagogiczne Instytutu (np. kosmogonia Układu Słonecznego). Oto jak hasłowo wyglądał praktyczny przydział tematów na poszczególne jednogodzinne *wykłady*:

I. Miary kątów. Funkcje trygonometryczne. Układy współrzędnych: na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej; współrzędne biegunowe. Współrzędne na sferze (sfera, okręgi małe i wielkie, oś główna, płaszczyzna podstawowa, półkole początkowe).

II. Sfera niebieska. Współrzędne astronomiczne: geograficzne, horyzontalne, równikowe godzinne i równonocne, ekliptyczne, galaktyczne.

III. Trygonometria sferyczna: wzory Gaussa. Związki współrzędnych horyzontalnych z godzinnymi i równonocnych z ekliptycznymi. Przyrządy do pomiaru współrzędnych: gnomon, półkole wierzchołkowe i kwadrant, przyrząd uniwersalny (teodolit), ekwatoriał, sekstans morski i lotniczy.

IV. Pomiaru teodolitem i sekstansem. Wyznaczanie południka: gnomonem, teodolitem metodą równych wysokości i z azymutu Polaris, sekstansem z wysokości górowania. Refrakcja atmosferyczna, paralaksy, aberracja światła.

V. Wschody, zachody, świty i zmierzchy. Górowania i dołowania, dnie i noce polarne, białe noce. Wyznaczanie szerokości geograficznej i deklinacji z wysokości kulminacji. Metoda Talcotta.

VI–VII. Czas słoneczny: prawdziwy, średni, miejscowy i strefowy. Czas uniwersalny i południk zmiany daty. Metoda Piewcowa. Wyznaczanie długości geograficznej i czasu gwiazdowego. Kalendarze. Czas efemeryd i atomowy. Zegary i międzynarodowa służba czasu. Data juliańska.

VIII. Zasady nawigacji morskiej. Zasięg widoczności i obniżenie horyzontu. Wyznaczanie pozycji statku i kursu po ortodromie i loksodromie.

IX. Mechanika ruchów orbitalnych: prawa Keplera, elementy orbit. Ruch Słońca po ekliptyce (strefy klimatyczne, pory roku, nasłonecznienie).

X. Układ Ziemia–Księżyc: fazy Księżyca, zaćmienia Słońca i Księżyca, pływy. Rotacja Ziemi: spłaszczenie Ziemi (współrzędne geodezyjne), precesja i nutacja osi rotacji Ziemi, ruchy biegunów.

XI. Układ Słoneczny: Słońce (budowa, aktywność, wpływ na klimat Ziemi), planety (własności fizyczne, prawo Titiusa-Bodego), planetki.

XII. Kosmogonia Układu Słonecznego (idee Descartesa, Kanta, Laplace'a, Buffona, Shmidta i Alfvéna). Współczesne teorie kosmogoniczne (nebularne).

XIII. Gwiazdy i galaktyki. Typy, budowa i ewolucja gwiazd. Budowa i rozmiary Galaktyki.

XIV. Kosmologia. Kwazary i radiogalaktyki. Poczernienie galaktyk. Promienianie reliktowe. Teoria wielkiego wybuchu.

W skrypcie nie uwzględniłem w ogóle tematyki ostatnich czterech wykładów, gdyż nie były one na tyle szczegółowe by na ich podstawie prowadzić obliczenia, a i objętość skryptu była limitowana.

Poszczególne godziny *ćwiczeń* prowadziłem według następującego planu:

I–III. Trygonometria sferyczna i przeliczanie współrzędnych.

IV–V. Wschody i zachody ciał niebieskich; świty i zmierzchy.

VI. Wyznaczanie szerokości geograficznej.

VII. Wycieczka do planetarium w Grudziądzu (1-godzinny seans).

- VIII. Kolokwium sprawdzające.
- IX–XI. Przeliczanie czasów i roczniki astronomiczne.
- XII. Wyznaczanie długości geograficznej.
- XIII. Obliczanie odległości i obniżenia horyzontu i pozycji statku.
- XIV. Wyznaczanie kursu po loksodromie i ortodromie.
- XV. Kolokwium sprawdzające.

Jako podstawowe podręczniki polecałem Mietelskiego (1979) do wykładów i Mietelskiego (1976) do ćwiczeń. Nim ukazały się prace Mietelskiego przez wiele lat standardem była książka Opolskiego (1964 i wydanie wcześniejsze). Mniej znane i trudniej osiągalne opracowania to Lisicki (1963) i Rolnik (1972). Inne polskie pozycje literaturowe, które obejmują tylko część wymaganego materiału to m.in. Kępiński (1951, 1959), Witkowski (1953), Karpowicz i Rudnicki (1960), Stepanov (1960), Kępiński i Dulian (1961), Zonn (1973), Stodółkiewicz (1977), Rybka (1978), Opalski i Cichowicz (1980), Hlibowicki (1981), Jarzębowski (1984) i Czajewski (1986).

Odsyłając do innych miejsc w tekście używam następujących oznaczeń: p. – punkt lub podpunkt, s. – strona, P. – przykład.

Wydruk niniejszego skryptu przygotowałem edytorem tekstów \TeX na komputerze osobistym IBM PC z drukarką *STAR NX-15* w Katedrze Radioastronomii UMK. Za wyjątkiem dwóch pierwszych rysunków (wykonanych wspomnianym edytorem) wszystkie pozostałe przygotowałem osobno wykorzystując naszą FORTRANowską bibliotekę procedur (PLOTSURF), wzorowanych na systemie CALCOMP, a współpracującą z systemem SURFER (firmy *Golden Software, Inc.*).

Toruń, listopad 1990 r.

K. M. B.

Spis treści

Uwagi wstępne	iv
1 Trygonometria	5
1.1 Trygonometria płaska	5
1.1.1 Miary kątów	5
1.1.2 Ważniejsze wzory i tożsamości	5
1.1.3 Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów	6
1.1.4 Rozwinięcia w szeregi	7
1.1.5 Wzory dotyczące trójkątów płaskich	7
1.1.6 Funkcje odwrotne	8
1.2 Trygonometria sferyczna	9
1.2.1 Trójkąty sferyczne	9
1.2.2 Pola na sferze	10
1.2.3 Wzory Gaussa	10
1.2.4 Wzory dla trójkąta biegunowego i analogie Napiera i Delambre'a	11
1.2.5 Reguła ćwiartek	11
1.2.6 Trójkąt prostokątny i reguły Napiera	11
1.2.7 Trójkąt prostoboczny (kwadratowy)	12
1.3 Funkcje hiperboliczne i odwrotne	12
1.4 Przykłady	13
2 Astronomia sferyczna	15
2.1 Układy współrzędnych	15
2.2 Najnowsze konwencje dotyczące układów odniesienia	16
2.3 Transformacja współrzędnych	19
2.3.1 Przekształcenia układów topocentrycznych, geocentrycznych i heliocentrycznych	19
2.3.2 Prostokątne \leftrightarrow biegunowe	19
2.3.3 Geodezyjne \leftrightarrow geocentryczne	20
<i>Program GEOD</i>	21
2.3.4 Horyzontalne \leftrightarrow równikowe	22
2.3.5 Równikowe \leftrightarrow ekliptyczne	23
2.4 Efekty wpływające na zmiany współrzędnych	24
2.4.1 Refrakcja atmosferyczna	24
2.4.2 Obniżenie horyzontu	25
2.4.3 Paralaksa dobową	26

2.4.4	Paralaksa roczna	27
2.4.5	Precesja	28
2.4.6	Nutacja	29
2.4.7	Aberracja	30
2.4.8	Czas propagacji światła (aberracja planetarna)	32
2.4.9	Ruchy własne gwiazd	32
2.4.10	Ruchy bieguna	33
2.4.11	Relatywistyczne ugięcie światła	33
2.5	Kulminacje	34
2.6	Wschody, zachody, świty i zmierzchy	35
2.7	Białe noce oraz dnie i noce polarne	36
2.8	Nasłonecznienie (insolacja)	36
2.9	Przykłady	38
	<i>Satelity geostacjonarne</i>	39
3	Rachuba czasu	47
3.1	Jednostki czasu i jednostki kalendarzowe	47
3.2	Czasy	48
3.2.1	Definicje	48
3.2.2	Zależność od długości geograficznej, <i>UT</i> , <i>GMT</i> i czasy strefowe	49
	<i>Czas letni w Polsce</i> (tabela)	50
3.2.3	Granica zmiany daty	51
3.2.4	Czas uniwersalny a czas gwiazdowy	51
3.2.5	Dalsze definicje i relacje między czasami	52
	<i>UT0, UT1, UT1R i UT2</i>	52
	<i>TAI i UTC</i>	53
	<i>ET, TDT i TDB</i>	54
3.2.6	Rozpowszechnianie czasu koordynowanego (<i>UTC</i>)	55
3.3	Dni juliańskie (<i>JD, JED</i> i <i>MJD</i>)	56
	<i>Dni tygodnia</i>	56
	<i>Dynamiczny czas gwiazdowy (DAST)</i>	56
	<i>Gwiazdowa data Greenwich (GSD)</i>	57
3.4	Lata Bessela oraz epoki juliańskie	57
3.5	Kalendarze	58
3.5.1	Słoneczne	58
	Juliański (stary styl)	59
	Gregoriański (nowy styl)	59
	Nowojuliański	60
3.5.2	Księżycowe	60
	Chiński	60
	Rzymski	61
	Muzułmański	61
3.5.3	Księżycowo-słoneczne	61
	Hinduski	61
	Hebrajski	62
3.5.4	Światowy	62
3.5.5	Biorytmiczny	63

3.6	Dni juliańskie a daty kalendarzowe	63
3.7	Rotacje Carringtona	65
3.8	Czas a światopogląd	65
	<i>Wedyjska rachuba czasu</i>	66
3.9	Przykłady	69
	<i>Księżycowy kalendarz sennika egipskiego</i>	72
4	Astronomiczne wyznaczanie położenia	73
4.1	Wyznaczanie południka miejscowego (azymutu)	73
	4.1.1 Z obserwacji Gwiazdy Biegunowej	74
	4.1.2 Gwiazdy okołobiegunowe w elongacjach	74
	4.1.3 Metoda równych wysokości	75
	4.1.4 Azymut w wertykale przedmiotu	75
4.2	Wyznaczanie długości geograficznej	75
4.3	Wyznaczanie szerokości geograficznej	76
	4.3.1 Z kulminacji gwiazd	76
	4.3.2 Z obserwacji momentów przejść gwiazd przez I wertykał	76
	4.3.3 Metoda Talcotta	76
	4.3.4 Metoda Piewcowa	77
	4.3.5 Z obserwacji Gwiazdy Biegunowej	77
4.4	Technika interferometrii wielkobazowej (VLBI)	78
	<i>Geometria interferometru wielkobazowego (VLBI)</i>	78
4.5	Przykłady	80
5	Nawigacja astronomiczna	83
5.1	Wyznaczanie pozycji statku	84
5.2	Wyznaczanie kursu po ortodromie	84
5.3	Wyznaczanie kursu po loksodromie	86
5.4	Przykłady	87
6	Mechanika ruchów orbitalnych	91
6.1	Prawa Keplera	91
6.2	Krzywe stożkowe	92
6.3	Prędkości na orbicie i prędkości kosmiczne	93
6.4	Orbita eliptyczna	94
	6.4.1 Elipsa jako orbita planetarna	94
	6.4.2 Elementy orbity	94
	6.4.3 Obliczanie położenia ciała na orbicie	95
6.5	Orbity paraboliczna i hiperboliczna	96
6.6	Wyznaczanie orbity z położenia i prędkości	97
6.7	Orbity rzeczywiste (planetarne) i okresy orbitalne	99
	<i>Tabela elementów orbit Merkurego, Wenus, Ziemi i Marsa</i>	99
6.8	Przykłady	101

7	Efemerydy	105
7.1	Katalogi gwiazd (FK5) i roczniki astronomiczne	105
7.2	Efemeryda Gwiazdy Biegunowej	106
7.3	Układ Słońce–Ziemia	107
7.3.1	Orbita Ziemi a klimat	107
7.3.2	Współrzędne Słońca	108
7.4	Współrzędne Księżyca	109
7.5	Fazy Księżyca	110
7.5.1	Data Wielkanocy	111
7.5.2	Pływy	112
7.6	Zaćmienia	113
7.6.1	Istota i znaczenie zjawisk zaćmieniowych	113
	<i>Zaćmienia Słońca</i>	114
	<i>Zaćmienia Księżyca</i>	114
	<i>Zakrycia gwiazd (okultacje)</i>	115
7.6.2	Okres saros	115
7.6.3	Obliczanie okoliczności zaćmień Słońca i Księżyca	116
7.6.4	Algorytm obliczania okoliczności zaćmień Księżyca	117
7.6.5	Faza zaćmienia	119
7.6.6	Najbliższe zaćmienia widoczne w Polsce	120
	<i>Tabela zaćmień Słońca, 1991 – 2050</i>	120
	<i>Tabela zaćmień Księżyca, 1991 – 2040</i>	123
7.7	Przykłady	124
	<i>Horoskop</i>	126
8	Materiały uzupełniające	129
8.1	Wybrane stałe	129
8.2	Kalendarz astronomiczny na rok 2000 (wyciąg)	129
8.3	Współrzędne geograficzne wybranych miejsc	136
8.4	Program do obliczania współrzędnych Słońca (SOL)	137
8.5	Program do obliczania współrzędnych Księżyca (LUNE)	139
	Spis literatury	143

Rozdział 1

Trygonometria

1.1 Trygonometria płaska

1.1.1 Miary kątów

Kąt pełny = $360^\circ = 24^h = 2\pi$ rad = 6,28318530717958647692528676656 rad

$$\begin{aligned} 1^h &= 60^m = 15^\circ & 1^\circ &= 60' = 4^m \\ 1^m &= 60^s = 15' & 1' &= 60'' = 4^s \\ 1^s &= 15'' & 1'' &= 0,067^s \end{aligned}$$

W celu zamiany miary *stopniowej* na *łukową* należy wymnożyć liczbę stopni ($^\circ$) przez $\pi/180 \approx 0,01745329$, liczbę minut łuku ($'$) – przez $\pi/(180 \cdot 60) \approx 0,00029089$, a liczbę sekund łuku ($''$) – przez $\pi/(180 \cdot 60 \cdot 60) \approx 0,00000485$ i zsumować wyniki. W przypadku odwrotnym, ilość radianów należy przemnożyć przez $180^\circ/\pi \approx 57,29577951308^\circ$, tj. około $57^\circ 17' 45''$ (dostaje się kąt wyrażony w stopniach), – przez $180^\circ \cdot 60/\pi \approx 3437,74677'$ (w minutach łuku) lub przez $180^\circ \cdot 60 \cdot 60/\pi \approx 206264,806''$ (w sekundach łuku).

Analogicznie postępujemy (w podanych współczynnikach kąt 180° zastępujemy przez 24^h) przy przeliczaniu miary *łukowej* na *czasową* (na jeden radian przypada około $3,8197186^h$, $229,18312^m$ lub $13750,987^s$) i odwrotnie (współczynniki $0,26179939$ rad/h, $0,00436332$ rad/min i $0,00007272$ rad/s).

1.1.2 Ważniejsze wzory i tożsamości

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} & \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(90^\circ \pm \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha \\ \sin(180^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha & \cos(180^\circ \pm \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

$$\sin 4\alpha = \cos \alpha (4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha)$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\alpha + \arctan \frac{x}{y})$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

1.1.3 Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów

α $\alpha[\text{rad}]$	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	180° π	270° $3\pi/2$	360° 2π
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

1.1.4 Rozwinięcia w szeregi

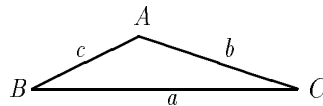
$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &\approx 0,9999992\alpha - 0,1666567\alpha^3 + 0,0083132\alpha^5 - 0,0001852\alpha^7 \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &\approx 1 - 0,5\alpha^2 + 0,0416667\alpha^4 - 0,001388886\alpha^6 + 0,0000248\alpha^8,\end{aligned}$$

gdzie α wyrażone jest w radianach a $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Podane przybliżenia (po znakach \approx), słuszne dla $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, zapewniają dokładność rzędu 10^{-6} .

$$\pi = 4 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots \right] = 3,141592653589793 \dots$$

1.1.5 Wzory dotyczące trójkątów płaskich

W poniższych związkach A, B i C są kątami leżącymi naprzeciw boków a, b i c , odpowiednio, $p = (a + b + c)/2$, ρ_o jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie, ρ_w — okręgu wpisanego w trójkąt, a S oznacza powierzchnię trójkąta.



Rys. 1.1: Schemat oznaczeń boków i kątów trójkąta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2} \quad \text{twierdzenie kosinusów}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\rho_o \quad \text{twierdzenie sinusów}$$

$$a = c \cos B + b \cos C \quad \text{twierdzenie o rzutowaniu}$$

$$\begin{aligned}S &= \frac{bc}{2} \sin A = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = p(p-a) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{abc}{4\rho_o} = 4\rho_o^2 \sin A \sin B \sin C = p\rho_w = \rho_w^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} & \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \sin A + \sin B - \sin C &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1 \\ \cos A + \cos B - \cos C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1 \\ \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C \\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 2 \cos A \cos B \cos C + 2 \\ \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C &= 2 \sin A \sin B \cos C \\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 4 \sin A \sin B \sin C \\ \sin 2A + \sin 2B - \sin 2C &= 4 \cos A \cos B \sin C \end{aligned}$$

1.1.6 Funkcje odwrotne

$$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = \tan(\arctan x) = x$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad 0 \leq x < 1$$

$$\begin{aligned} \arccos x &= \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad 0 < x \leq 1 \\ &= \frac{1}{2} \arccos(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \arcsin x \pm \arcsin y &= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}) & xy \leq 0 \\ &= \arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \mp xy) & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos x \pm \arccos y &= \arccos(xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & x+y \geq 0, x < y \\ &= \arcsin(y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}) & xy \leq 0 \end{aligned}$$

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \quad -1 < xy < 1$$

Warunki podane z prawej strony powyższych tożsamości chociaż dostateczne nie są koniecznymi, tzn. wzory te są słuszne także w innych sytuacjach. Np., tam gdzie podano $xy \leq 0$ wystarczy również spełnienie warunku $x^2 + y^2 \leq 1$, a w ostatnim z podanych przypadków prawa i lewa część warunku jest spełniona oddzielnie dla górnych i dolnych, odpowiednio, znaków tożsamości (w \pm oraz \mp).

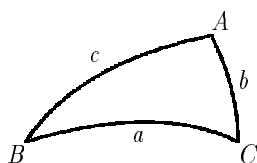
1.2 Trygonometria sferyczna

1.2.1 Trójkąty sferyczne

Najkrótsza droga między dwoma punktami na sferze wiedzie wzdłuż *wielkiego koła* (albo *okręgu*), tzn. koła którego płaszczyzna przechodzi przez środek sfery. *Trójkąt sferyczny* powstaje z połączenia łukami kół wielkich (tworzącymi *boki* trójkąta) najkrótszymi drogami trzech punktów na sferze nazywanych *wierzchołkami* trójkąta. Długości boków wyraża się kątami między odpowiednimi prostymi poprowadzonymi ze środka sfery przez wspomniane punkty. Wierzchołkowe kąty A, B oraz C są kątami zawartymi między płaszczyznami kół wielkich odpowiadających bokom b i c , a i c oraz a i b . Zarówno boki jak i kąty wierzchołkowe w trójkątach sferycznych są (z definicji) mniejsze od 180° .

Trójkąt sferyczny jest jednoznacznie określony m.in. przez

- trzy boki
- trzy kąty
- dwa boki i kąt między nimi zawarty
- dwa kąty przy wspólnym boku



Rys. 1.2: Schemat oznaczeń boków i kątów trójkąta sferycznego

Promienie *małych kół*, opisanego ρ_o i wpisanego ρ_w w trójkąt sferyczny, można obliczyć z zależności (ε jest nadmiarem sferycznym opisanym niżej w p. 1.2.2):

$$\begin{aligned} \tan \rho_o &= \frac{\tan \frac{a}{2}}{\sin(A - \frac{\varepsilon}{2})} = \frac{\tan \frac{b}{2}}{\sin(B - \frac{\varepsilon}{2})} = \frac{\tan \frac{c}{2}}{\sin(C - \frac{\varepsilon}{2})} \\ &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin(A - \frac{\varepsilon}{2}) \sin(B - \frac{\varepsilon}{2}) \sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}} \\ \tan \rho_w &= \tan \frac{A}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Pola na sferze

Pole trójkąta sferycznego wynosi

$$S = R^2 \varepsilon,$$

gdzie R jest promieniem sfery a $\varepsilon = A + B + C - \pi$, tzw. *nadmiar* albo *przewyżka sferyczna*, musi być wyrażone w radianach. Nadmiar sferyczny można też obliczyć ze wzorów:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C.$$

$$\cot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cot \frac{a}{2} \cot \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}$$

W trilateracji (kiedy znane są trzy boki trójkąta) mogą mieć zastosowanie następujące tożsamości:

$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2}}$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

gdzie $p = (a + b + c)/2$.

W geodezji, przy obliczaniu przewyżki sferycznej w trójkątach sieci trygonometrycznych (kiedy boki trójkątów można traktować jako małe), stosuje się następujące przybliżenia:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2} ab \sin C \approx a^2 \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A},$$

gdzie boki a i b trzeba wyrazić w radianach (w praktyce liniową długość boków dzielimy przez promień Ziemi na danej szerokości geograficznej otrzymując boki trójkątów sieci w radianach, np. $a = a_{lin}/R_{Ziemi}$).

Pas sferyczny pomiędzy równoleżnikami φ_1 i φ_2 ma pole

$$2\pi R^2(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

1.2.3 Wzory Gaussa

$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$	twierdzenie sinusów
$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$	twierdzenie kosinusów
$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$	wzór mieszany

1.2.4 Wzory dla trójkąta biegunowego i analogie Napiera (Nepera) i Delambre'a

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

$$\frac{\sin a}{\tan b} = \frac{\sin C}{\tan B} + \cos a \cos C \qquad \frac{\sin A}{\tan B} = \frac{\sin c}{\tan b} - \cos A \cos c$$

$$\tan \frac{b+c}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \tan \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$\tan \frac{b-c}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \tan \frac{a}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$\tan \frac{A+B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \qquad \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \qquad \frac{\tan \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{b+c}{2} = \sin \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2} \qquad \sin \frac{A}{2} \cos \frac{b+c}{2} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2}$$

1.2.5 Reguła ćwiartek

W trójkącie sferycznym połowa sumy dwóch kątów leży w tej samej ćwiartce kątów co połowa sumy boków przeciwległych.

1.2.6 Trójkąt prostokątny i reguły Napiera

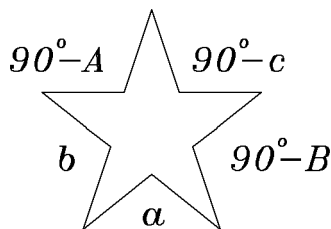
Jeśli kąt C jest prostym, tzn. $C = 90^\circ$, to:

$$\cos A = \sin B \cos a = \frac{\tan b}{\tan c} \qquad \cos B = \sin A \cos b = \frac{\tan a}{\tan c}$$

$$\sin a = \sin c \sin A = \frac{\tan b}{\tan B} \qquad \sin b = \sin c \sin B = \frac{\tan a}{\tan A}$$

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{1}{\tan A \tan B}.$$

Na tych dziesięciu zależnościach opierają się mnemoniczne reguły Napiera wykorzystywane przez geodetów i topografów. Mówią one, że w diagramie:



sinus każdego z kątów jest równy (1) iloczynowi tangensów dwóch kątów doń przylegających, oraz (2) iloczynowi kosinusów kątów przeciwległych.

1.2.7 Trójkąt prostoboczny (kwadratowy)

Jeśli w trójkącie sferycznym bok c jest prostym, tzn. $c = 90^\circ$, to:

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin b \cos A = -\frac{\tan B}{\tan C} & \cos b &= \sin a \cos B = -\frac{\tan A}{\tan C} \\ \sin A &= \sin C \sin a = \frac{\tan B}{\tan b} & \sin B &= \sin C \sin b = \frac{\tan A}{\tan a} \\ \cos C &= -\cos A \cos B = \frac{-1}{\tan a \tan b}. \end{aligned}$$

1.3 Funkcje hiperboliczne i odwrotne

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(-x) = \pm \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \pm \sqrt{\frac{\cosh 2x - 1}{2}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\cosh(-x) = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \sqrt{\frac{\cosh 2x + 1}{2}} = 2 \cosh^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + 1} = \frac{\cosh 2x - 1}{\sinh 2x}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\sinh 3x = 4 \sinh^3 x + 3 \sinh x \quad \cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} \cosh 2x - 1 \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2} \cosh 2x + 1 \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^3 x = \frac{1}{4}(\sinh 3x - 3 \sinh x) \quad \cosh^3 x = \frac{1}{4}(\sinh 3x + 3 \sinh x)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{x \pm y}{2} \cosh \frac{x \mp y}{2} \quad \cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x \pm y}{2} \sinh \frac{x \mp y}{2}$$

$$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y = \sinh(x+y) \sinh(x-y)$$

$$\sinh^2 x + \cosh^2 y = \cosh(x+y) \cosh(x-y)$$

$$\operatorname{Arsh} x = -\operatorname{Arsh}(-x) = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Arch} x = +\operatorname{Arch}(-x) = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$\operatorname{Arth} x = -\operatorname{Arth}(-x) = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh} (x\sqrt{1 + y^2} \pm y\sqrt{1 + x^2})$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch} [xy \pm \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}]$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arsh} [xy \pm \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 - 1)}] = \operatorname{Arch} (y\sqrt{x^2 + 1} \pm x\sqrt{y^2 - 1})$$

1.4 Przykłady

Przykład 1.1

Wyrazić kąty $258^\circ 21' 31''$ i $51^\circ 44' 23,4''$ w mierze czasowej i łukowej.

- - - ◇◇◇ - - -

$$\begin{aligned} 258^\circ 21' 31'' &= 258^\circ + (21 + 31/60)^\circ / 60 = 258,35875^\circ = 258,35875^h / 15 = 15,890583^h = \\ &15^h + 60 \cdot 0,890583^m = 15^h 53,4350^m = 15^h 53^m + 60 \cdot 0,4350^s = 15^h 53^m 26,1^s \\ 258,35875^\circ &= 258,35875 \cdot \pi / 180 \text{ rad} = 4,160145 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51^\circ 44' 23,4'' &= 51^\circ (44 + 23,4/60)^\circ / 60 = 51,73983^\circ = 51,73983^h / 15 = 3,449322^h = \\ &3^h + 60 \cdot 0,449322^m = 3^h 26,9593^m = 3^h 26^m + 60 \cdot 0,9593^s = 3^h 26^m 57,6^s \\ 3,449322^h &= 3,449322 \cdot \pi / 12 \text{ rad} = 0,903030 \text{ rad} \end{aligned}$$

Przykład 1.2

W trójkącie sferycznym dane są boki $b = 120^\circ$ i $c = 45^\circ$ oraz kąt między nimi zawarty $A = 30^\circ$. Obliczyć długość trzeciego boku.

- - - ◇◇◇ - - -

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0,17678 \\ a &= \arccos(0,17678) = 79,81793^\circ. \end{aligned}$$

Przykład 1.3

Obliczyć powierzchnię trójkąta z przykładu 1.2 przyjmując, że promień sfery wynosi 6370 km.

- - - ◇◇◇ - - -

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \sin A = \frac{\sin 60^\circ \sin 22,5^\circ}{\cos 39,90896^\circ} \sin 30^\circ = 0,21603$$

$$\varepsilon = 2 \cdot 12,47579^\circ = 0,435487 \text{ rad}$$

$$S = R^2 \cdot \varepsilon = 6370^2 \cdot 0,435487 \text{ km}^2 = 17671 \cdot 10^3 \text{ km}^2.$$

Przykład 1.4

Obliczyć procent powierzchni Ziemi objęty kołami podbiegunowymi ($|\varphi| > 66,5^\circ$).

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Stosujemy wzór na powierzchnię pasa sferycznego (p. 1.2.2):

$$S = 2\pi R^2(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2\pi R^2(\sin 90^\circ - \sin 66,5^\circ) = 2\pi R^2(1 - 0,91706) =$$

$$= 2\pi R^2 \cdot 0,08294$$

W procentach: $100\% \frac{2S}{4\pi R^2} = 100 \cdot 0,08294\% = 8,3\%$

Przykład 1.5

Jakiemu pasowi wzdłuż równika Ziemi i jakiemu odstępowi południków odpowiada powierzchnia czap podbiegunowych z przykładu 1.4?

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Z przekształconego wzoru na powierzchnię pasa sferycznego mamy:

$$\sin \varphi - \sin 0^\circ = \sin \varphi = \frac{S}{2\pi R^2} = 0,08294$$

$\varphi = \arcsin 0,08294 = 4,76^\circ$, a więc szukany pasem jest obszar pomiędzy równoleżnikami $+4,76$ i $-4,76^\circ$.

Wycinkowi sfery między południkami odległymi o $\Delta\lambda$ odpowiada powierzchnia $\frac{\Delta\lambda}{360^\circ} 4\pi R^2 = 2S$ tak, że $\Delta\lambda = \frac{2S}{4\pi R^2} 360^\circ = 0,08294 \cdot 360^\circ = 29,9^\circ$

Rozdział 2

Astronomia sferyczna

2.1 Układy współrzędnych

Współrzędne określają położenia obiektów w ustalonej przestrzeni (w przestrzeni trójwymiarowej, na powierzchni sfery albo na płaszczyźnie). Trzy wielkości wystarczają do jednoznacznego wskazania punktu w przestrzeni. Mogą to być trzy **współrzędne prostokątne** (zwane też kartezjańskimi) albo **biegunowe** (prawo- lub lewoskrętne).

Podstawą układu kartezjańskiego są trzy wzajemnie prostopadłe osie x , y i z , które przecinają się w jednym punkcie zwanym początkiem układu. Współrzędnymi dowolnego punktu w takim układzie są długości rzutów promienia wodzącego, odcinka poprowadzonego z początku układu do punktu, na poszczególne osie. W układzie biegunowym ten sam punkt określa długość promienia wodzącego i dwa kąty: „szerokość” — pomiędzy promieniem wodzącym i płaszczyzną podstawową (wyznaczoną zwykle przez osie x i y), oraz „długość” — między rzutem promienia na płaszczyznę podstawową i kierunkiem odniesienia (początkiem pomiaru tej współrzędnej; zwykle oś x).

Są też inne sposoby definiowania układów odniesienia. Np. do określania położenia ciał na Ziemi używa się częściej układu odniesionego do powierzchni elipsoidy przybliżającej kształt Ziemi (*geoidy*). Wtedy współrzędna nazywana *szerokością geograficzną* (*geodezyjną* lub *astronomiczną* φ) jest odniesiona do kierunku pionu (prostopadłego do elipsoidy), a nie linii: wybrany punkt — środek Ziemi, jak w przypadku układu geocentrycznego. Zamiast odległości od środka Ziemi podaje się *wysokość* punktu nad elipsoidą.

Podstawowe informacje o ważniejszych układach stosowanych w astronomii zawiera tabela na s. 16. Z wyjątkiem geograficznego, każdy z tych układów może mieć w zasadzie dowolnie umiejscowiony początek (środek), chociaż zazwyczaj rozumie się, że np. układ horyzontalny ma początek w miejscu obserwatora. Ze względów praktycznych w astronomii rozróżnia się najczęściej trzy następujące układy:

- *topocentryczny* ze środkiem w miejscu obserwatora (na Ziemi),
- *geocentryczny* ze środkiem w centrum masy Ziemi,
- *heliocentryczny* ze środkiem w centrum masy Słońca lub w barycentrum Układu Słonecznego.

W szczególnych przypadkach można spotkać się z jeszcze innymi układami, np. planetocentrycznymi albo odniesionymi do środka Galaktyki.

Układy współrzędnych sferycznych

Układ→ Element↓	Geogra- ficzny	Hory- zontalny	Równi- kowy†	Eklip- tyczny	Galak- tyczny
Płaszczyzna podstawowa	równik ziemski	horyzont	równik niebieski	ekliptyka	płaszczyzna Galaktyki
Oś główna	oś Ziemi	pion	oś świata	oś ekliptyki	oś Galaktyki
„Długość”					
nazwa	długość geograficzna	azymut	kąt godzinny	długość ekliptyczna	długość galaktyczna
symbol	λ	a lub A	t	λ	l
początek	południk zerowy	południk lokalny	południk lokalny	punkt Barana Υ	jądro Galaktyki
kierunek	wschód	zachód	zachód	wschód	wschód
zakres	$\pm 180^\circ$	$0 \div 360^\circ$	$0 \div 24^h$	$0 \div 360^\circ$	$0 \div 360^\circ$
„Szerokość”					
nazwa	szerokość geograficzna*	wysokość‡	deklinacja	szerokość ekliptyczna	szerokość galaktyczna
symbol	φ	h	δ	β	b
zakres	$-90 \div +90^\circ$	$-90 \div +90^\circ$	$-90 \div +90^\circ$	$-90 \div +90^\circ$	$-90 \div +90^\circ$

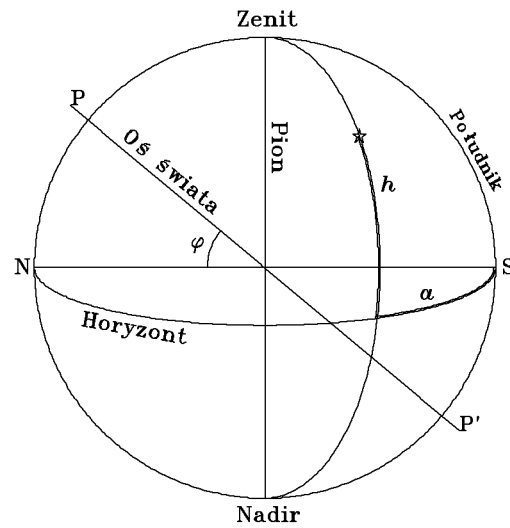
† Istnieją dwa układy równikowe. Ten nazywa się pierwszym, godzinnym albo południkowym. W drugim układzie, tzw. *równonocnym*, zamiast kąta godzinnego (t) występuje *rektascensja*: $\alpha = T_\star - t$, gdzie T_\star jest *czasem gwiazdowym*. Rektascensję mierzy się od południka przechodzącego przez bieguny niebieskie i punkt Υ (Barana; miejsce przecięcia się ekliptyki z równikiem niebieskim) w kierunku z zachodu na wschód (odwrotnie niż kąt godzinny) w zakresie od 0 do 24^h .

‡ Często zamiast wysokości podaje się odległość zenitalną: $z = 90^\circ - h$.

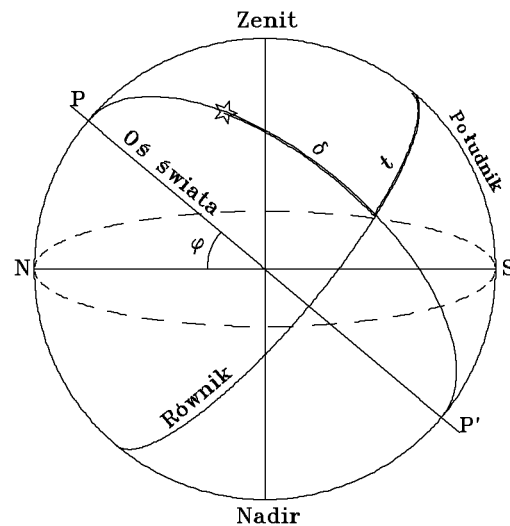
* Szerokość geograficzną (astronomiczną lub geodezyjną) mierzy się pomiędzy kierunkiem pionu i płaszczyzną równika — inaczej niż szerokość *geocentryczną* oznaczaną zwykle przez φ' i definiowaną od promienia wodzącego punktu do płaszczyzny równika.

2.2 Najnowsze konwencje dotyczące układów odniesienia

Wszystkie praktyczne pomiary współrzędnych wykonuje się względem pewnych punktów, kierunków lub płaszczyzn odniesienia. Takie elementy referencyjne (np. kierunek pionu, kierunki osi głównych, punkt równonocy) muszą być określone przynajmniej tak samo dokładnie jak dokładne są pomiary. W miarę postępu technik pomiarowych i rozwoju wiedzy definicje układów odniesienia muszą być poprawiane i uściślane.



Rys. 2.1 Układ współrzędnych horizontalnych: azymut (α) i wysokość (h)



Rys. 2.2 Układ godzinnych współrzędnych równikowych: kąt godzinny (t) i deklinacja (δ)

W ostatnich dekadach nastąpił niezwykle wzrost dokładności pomiarów astro-metryczno-geodezyjnych, który jest wynikiem wprowadzenia całkowicie nowych technik pomiarowych: radiowej interferometrii na bardzo długich bazach (VLBI, p. 4.4) i lasero-wych pomiarów odległości satelitów (SLR, od ang. Satellite Laser Ranging) oraz Księżyca (LLR, od ang. Lunar Laser Ranging). W konsekwencji dotychczas akceptowane i w pełni zadowalające konwencjonalne definicje stały się stopniowo coraz mniej użyteczne lub wręcz przestarzałe. Na przykład, układ odniesienia współrzędnych równikowych oparty na optycznych wyznaczeniach położenia około 1500 gwiazd Galaktyki w poprzedniej wersji

(katalog FK4) miał wewnętrzną zgodność na poziomie rzędu $0,1''$. Obecnie położenia na niebie mierzy się rutynowo (przynajmniej radioastronomiczną techniką VLBI) z dokładnościami rzędu $0,001''$ tak, że poprawienie nawet o cały rząd wielkości optycznego układu odniesienia (zapewnia to nowy katalog gwiazd FK5) nie rozwiązuje problemów.

Trzeba także zdawać sobie sprawę z trudności utrzymania odpowiednio stabilnego układu odniesienia. Dla przypadku współrzędnych na Ziemi chcielibyśmy mieć możliwość odniesienia pomiarów długości i szerokości geograficznej do jakiejś sztywnej sieci punktów odniesienia. Niestety, przy centymetrowych dokładnościach pomiarów odległości setek i tysięcy kilometrów, nawet najstaranniej wybrane punkty na powierzchni Ziemi okazują się być niestabilne już na przestrzeni czasu rzędu jednego roku. Odpowiedzialne za niestabilności są efekty geofizyczne typu ruchu płyt tektonicznych (części składowych skorupy ziemskiej) czy pływów. Ponadto oś rotacji Ziemi przemieszcza się względem całej skorupy ziemskiej (ruchy biegunów) i względem obiektów pozagalaktycznych (które możemy uważać za bardzo stabilne punkty odniesienia). Nauka dysponuje obecnie modelami wspomnianych zjawisk lecz nie są to modele idealne; w istocie ich niedokładności ujawniają się w pomiarach najnowocześniejszymi technikami.

W związku z zaistniałą sytuacją w ciągu kilku ostatnich lat wprowadzono szereg zmian organizacyjnych i w zakresie konwencji dotyczących działalności międzynarodowych służb utrzymywania układów odniesienia. W szczególności, powołano służbę rotacji Ziemi, IERS (od ang. International Earth Rotation Service), która od 1988 r. przejęła niektóre funkcje byłej BIH (od fr. Bureau International de l'Heure) oraz całą działalność IMPS (od ang. International Polar Motion Service). Jednym z podstawowych zadań IERS jest praktyczna realizacja układów odniesienia na Ziemi i na niebie. Prace takie opierają się na systematycznych pomiarach, głównie technikami VLBI, SLR i LLR, położen punktów na powierzchni Ziemi oraz położen zwartych (punktowych) radioźródeł pozagalaktycznych.

Ziemiński układ odniesienia IERS (ITRF)

Środek ITRF (ang. IERS Terrestrial Reference Frame) znajduje się w centrum masy Ziemi z tolerancją 10 cm. Jednostką długości jest metr układu jednostek SI. *Biegun* i *południk zerowy* są utrzymywane poprzez pomiary położen kilkudziesięciu stacji (51 w 1989 r.) w zgodzie z określeniami BIH, które nawiązywały do wcześniejszych definicji: Conventional International Origin (CIO, dla bieguna) i południk Greenwich sprecyzowane według współrzędnych 5 stacji International Latitude Service. Praktyczną realizacją ziemińskiego układu odniesienia są współrzędne około stu stacji (115 w 1989 r.) opracowane przez IERS.

Niebieski układ odniesienia IERS (ICRF)

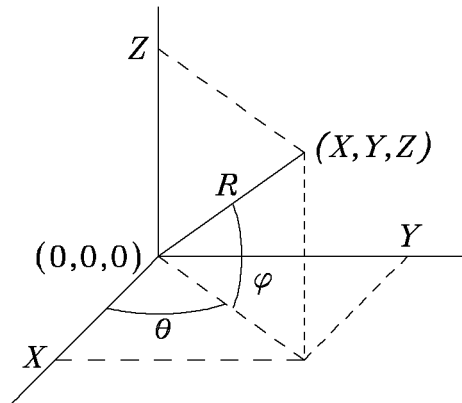
Środkiem ICRF (ang. IERS Celestial Reference Frame) jest barycentrum Układu Słonecznego. Kierunek *bieguna* niebieskiego określają aktualne teorie precesji i nutacji Międzynarodowej Unii Astronomicznej (MUA albo IAU, od ang. International Astronomical Union) z roku 1976 i 1980 (odpowiednio) na moment południa 1 stycznia 2000 r. (epoka J2000). Początek współrzędnej *rektascensji* ustalono zgodnie z katalogiem FK5 (z tolerancją $0,01''$), a określa go zestaw położen kilkudziesięciu (51 w 1989 r.) radioźródeł. Do zastosowań praktycznych IERS opracowuje katalogi większej ilości źródeł (228 w 1989 r.), które stanowią praktyczną realizację układu odniesienia (*Annual Report for 1987, 1989*).

2.3 Transformacja współrzędnych

2.3.1 Przekształcenia układów topocentrycznych, geocentrycznych i heliocentrycznych

Transformację współrzędnych między układami topocentrycznym, geocentrycznym i heliocentrycznym przeprowadzamy zwykle na współrzędnych prostokątnych. Jeśli robimy takie przekształcenie, to automatycznie uwzględniana jest *paralaksa* związana z danymi układami (efekt ten omawiamy w p. 2.4.3 i 2.4.4). Współrzędnymi prostokątnymi w drugim układzie są współrzędne w pierwszym pomniejszone o współrzędne początku pierwszego układu w drugim (dotyczy to oczywiście dwóch układów tego samego rodzaju, np. równikowych heliocentrycznych i równikowych geocentrycznych, wzory (6.12) i (6.13)). Formuły właściwe do zamiany równikowych współrzędnych geocentrycznych na topocentryczne podajemy w p. 7.4.

Transformacja współrzędnych pomiędzy dwoma układami o wspólnym początku może polegać na rozwiązaniu odpowiedniego trójkąta sferycznego. Rozwiązanie uzyskuje się przez zastosowanie wzorów Gaussa (p. 1.2.3).



Rys. 2.3 Prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich. Współrzędnymi są rzuty promienia wodzącego punktu na osie x, y i z: X, Y i Z. θ i φ są współrzędnymi biegunowymi tego samego punktu

2.3.2 Prostokątne \Leftrightarrow biegunowe

Związki między współrzędnymi prostokątnymi (X, Y, Z) i biegunowymi (R, φ, θ) zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \theta & R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ Y &= R \cos \varphi \sin \theta & \varphi &= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \arcsin \frac{Z}{R} \\ Z &= R \sin \varphi & \theta &= \arctan \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

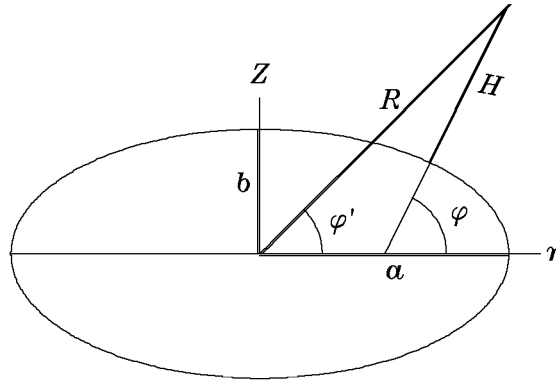
przy czym prawo- lub lewoskrętność układu wyraża się kierunkiem pomiaru współrzędnej Y i θ , gdy patrzymy ze środka (początku) układu w kierunku osi $-X$ mając oś Z skierowaną do góry (układy prawoskrętne podlegają regule prawej dłoni albo śruby prawoskrętnej).

2.3.3 Geodezyjne \Leftrightarrow geocentryczne

Współrzędne geodezyjne można przeliczyć na geocentryczne następująco:

$$\begin{aligned}\sqrt{X^2 + Y^2} &= r = a \cos \psi + H \cos \varphi \\ Z &= b \sin \psi + H \sin \varphi,\end{aligned}$$

gdzie a i b są dużą i małą półosią elipsoidy, H jest wysokością ponad jej powierzchnię (dodatnio w górę) zaś $\psi = \arctan(\frac{b}{a} \tan \varphi)$ (szerokość zredukowana). Oczywiście, szerokość geocentryczna $\varphi' = \arctan \frac{Z}{r}$, a długość (geograficzna) jest ta sama w obu układach.



Rys. 2.4 Geograficzne współrzędne geodezyjne albo astronomiczne (φ , H) i geocentryczne (φ' , R)

Transformacja odwrotna nastęrcza pewne trudności — tak, że wielu autorów stwierdza wręcz nieistnienie ścisłego odwrotnego przekształcenia. Opracowano szereg algorytmów iteracyjnych. Oto jeden z najbardziej efektywnych (Bowring 1976). Najpierw oblicza się „zerowe” przybliżenie szerokości zredukowanej:

$$\psi_0 = \arctan \frac{aZ}{br}$$

a pierwsze przybliżenie na ψ dostaje się z:

$$\tan \psi = \frac{bZ + (a^2 - b^2) \sin^3 \psi_0}{ar - (a^2 - b^2) \cos^3 \psi_0}.$$

Drugie i zarazem ostatnie przybliżenie jest powtórzeniem pierwszego po podstawieniu ψ w miejsce ψ_0 . Szerokość geodezyjna jest teraz równa:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{a}{b} \tan \psi \right)$$

zaś wysokość nad elipsoidą można obliczyć na kilka sposobów, np. ze wzoru

$$H = \left(r - a \sqrt{1 + \tan^2 \psi} \right) \cos \varphi + Z \sin \varphi.$$

Ta procedura w praktyce daje dokładności pojedynczych nanometrów (10^{-9} m, co jest na granicy podwójnej precyzji większości współczesnych obliczeń komputerowych) w zakresie wysokości $-5000 \div +1000000$ km i dla wszystkich szerokości (wyłączając oczywiście punkty bardzo bliskie bieguna; Borkowski 1989a, Laskowski 1991). W tym względzie nie ustępuje ona algorytmom opartym o rozwiązania ścisłe.

Teoretycznie bezbłędny jest program **GEOD**, napisany w języku FORTRAN77 dla IBM PC, gdyż opiera się on na ścisłym algorytmie obliczania współrzędnych geodezyjnych (tu **fi** i **H**) z geocentrycznych (tutaj prostokątnych: $\mathbf{r} = R \cos \varphi'$ i $\mathbf{Z} = R \sin \varphi'$, gdzie R jest odległością od środka Ziemi, a φ' - szerokością geocentryczną).

```

subroutine GEOD(r,Z,fi,H)
c Przelicza wspolrzedne geocentryczne na geodezyjne w oparciu
c o rozwiazanie scisle (Borkowski 1987a, 1989a)
c r, Z = wspolrzedne prostokatne (skladowa rownikowa [m] i biegunowa [m])
c fi, H = wspolrzedne geodezyjne (szerokosc [rad] i wysokosc [m])
  implicit real*8(a-h,o-z)
  data a,frec /6378140.d0,298.257d0/
  dcurt(x) = dsign(dexp(dlog(dabs(x))/3d0),x)
  b = dsign(a - a/frec,Z)
  if(r.eq.0d0) return
  E = ((Z + b)*b/a - a)/r
  F = ((Z - b)*b/a + a)/r
  P = (E*F + 1.)*4d0/3.
  Q = (E*E - F*F)*2.
  D = P*P*P + Q*Q
  if(D.lt. 0d0) v = 2*dsqrt(-P)*dacos(dacos(Q/P/dsqrt(-P))/3)
  if(D.ge.0d0) v = - dcurt(Q + dsqrt(D)) - dcurt(Q - dsqrt(D))
  if(D.ge.0d0) v = -(Q + Q + v*v*v)/(3*P)
  g = 0.5*(E + dsqrt(E*E + v))
  t = dsqrt(g*g + (F - v*g)/(g + g - E)) - g
  fi = datan((1. - t*t)*a/(2*b*t))
  H = (r - a*t)*dcos(fi) + (Z - b)*dsin(fi)
end

```

*Dane i wyniki testowe (argumenty podprogramu **GEOD**):*

```

r=4000000.00000000 Z=6000000.00000000 fi=0.985526645027216 H=847786.688189974
4000.000000000000 -6000.000000000000 -1.48883906081174 -6350591.52477262

```

Na powierzchni elipsoidy (dla $H = 0$ m) mamy prosty i ścisły związek szerokości geodezyjnej z geocentryczną:

$$\varphi' = \arctan \left(\frac{b^2}{a^2} \tan \varphi \right) \quad \text{lub} \quad \varphi = \arctan \left(\frac{a^2}{b^2} \tan \varphi' \right).$$

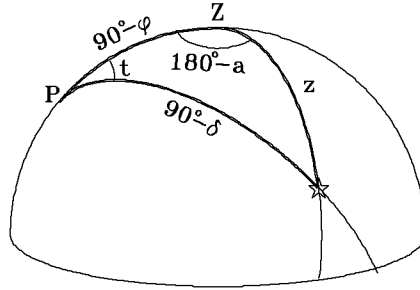
Niektórzy posługują się także wygodnymi przybliżeniami (Lang 1974):

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi' &= \arctan \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi} \tan \varphi \right) = \arctan \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi'} \tan \varphi' \right) \approx \\ &\approx 11'32,7430'' \sin 2\varphi - 1,1633'' \sin 4\varphi + 0,0026'' \sin 6\varphi \\ R &= \sqrt{r^2 + Z^2} = a \sqrt{\frac{1 + (b/a)^4 \tan^2 \varphi}{1 + (b/a)^2 \tan^2 \varphi}} \approx a - (a - b) \sin^2 \varphi \approx \\ &\approx a(0,998327073 + 0,001676438 \cos 2\varphi - 0,000003519 \cos 4\varphi + 8 \cdot 10^{-9} \cos 6\varphi).\end{aligned}$$

2.3.4 Horyzontalne \iff równikowe

Transformacja współrzędnych sferycznych polega na rozwiązaniu trójkąta sferycznego, którego wierzchołkami są *bieguny*, tj. miejsca przecięcia sfery przez osie główne układów horyzontalnego i równikowego należy rozwiązać trójkąt nazywany *paralaktycznym*. Jego boki mają wartości: $90^\circ - \varphi$ (odległość biegunów; φ jest szerokością geograficzną miejsca obserwacji), $90^\circ - h = z$ (odległość zenitalna) i $90^\circ - \delta$ (dopełnienie deklinacji do 90°). Dwa z kątów wierzchołkowych mają wartości t (przy biegunie niebieskim) i $180^\circ - a$ (przy zenicie). Oto rozwiązanie tego trójkąta (polegające na zastosowaniu wzorów Gaussa) pozwalające przeliczyć współrzędne **horyzontalne** na **równikowe**:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin a \\ \cos \delta \cos t &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos a.\end{aligned}\tag{2.1}$$



Rys. 2.5 Trójkąt paralaktyczny wiąże współrzędne horyzontalne i godzinne równikowe

Dwa ostatnie równania można zapisać prościej pamiętając jednak o znakach licznika (znak sinus obliczanego kąta t) i mianownika (znak kosinusa tego kąta), które pozwalają określić ćwiartkę kąta pełnego rozwiązania na kąt godzinny, t :

$$\tan t = \frac{\sin a}{\tan h \cos \varphi + \sin \varphi \cos a}.$$

Wzory typu $\tan t = x/y$ są szczególnie efektywne w zastosowaniach na kalkulatorach posiadających wbudowaną funkcję $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}$ (też: **TO POLAR**, $\rightarrow \mathbf{P}$; występujące w kalkulatorach takich firm jak Hewlett Packard, Texas Instruments, AFP, Casio, Commodore, Sharp, Sanyo i in.) służącą do transformacji współrzędnych prostokątnych: \mathbf{x} (nasz licznik prawej strony wzoru) i \mathbf{y} (nasz mianownik) na biegunowe: Θ (nasze t) i \mathbf{r} , albo funkcji $\text{ATAN2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, która występuje w niektórych językach programowania (np. FORTRAN lub C). Jeśli nie dysponujemy wymienionymi środkami to należy obliczyć wartość α dla bezwzględnej wartości argumentu funkcji $\tan t$, $|x/y|$, i wtedy:

$$\begin{array}{lll} t = \alpha & \text{jeśli } x > 0 \text{ i } y > 0 & (t \text{ w pierwszej ćwiartce}) \\ t = 180 - \alpha & \text{jeśli } x > 0 \text{ i } y < 0 & (t \text{ w drugiej ćwiartce}) \\ t = 180 + \alpha & \text{jeśli } x < 0 \text{ i } y < 0 & (t \text{ w trzeciej ćwiartce}) \\ t = 360 - \alpha & \text{jeśli } x < 0 \text{ i } y > 0 & (t \text{ w czwartej ćwiartce}) \end{array}$$

Przekształcenie odwrotne, do zamiany współrzędnych **równikowych** na **horyzontalne**, otrzymuje się podobnie (poprzez wzory Gaussa):

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \\ \cos h \sin a &= \cos \delta \sin t \\ \cos h \cos a &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \end{aligned} \tag{2.2}$$

z analogicznym skróconym zapisem:

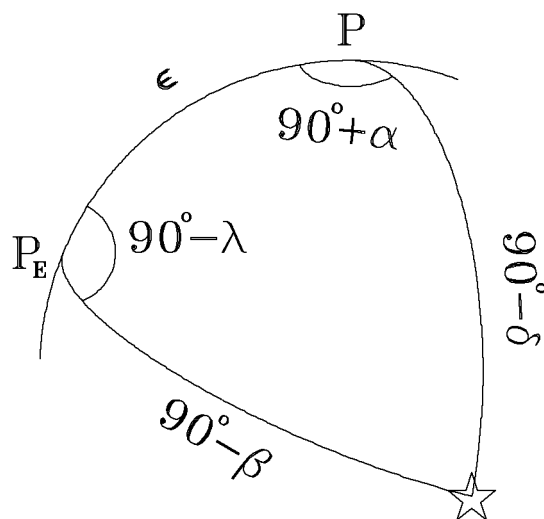
$$\tan a = \frac{\sin t}{-\tan \delta \cos \varphi + \sin \varphi \cos t}.$$

2.3.5 Równikowe \Leftrightarrow ekliptyczne

W celu przekształcenia współrzędnych **równikowych** na **ekliptyczne** lub odwrotnie wykorzystujemy trójkąt o wierzchołkach w biegunie niebieskim, biegunie ekliptyki i wybranym miejscu. Trójkąt ten ma boki ϵ (między biegunami; jest to jednocześnie kąt nachylenia równika do ekliptyki — tak, jak w trójkącie paralaktycznym $90^\circ - \varphi$ jest nachyleniem płaszczyzn horyzontu i równika), $90^\circ - \beta$ i $90^\circ - \delta$, a kąty przy biegunach wynoszą $90^\circ - \lambda$ (naprzeciw boku $90^\circ - \delta$) i $90^\circ + \alpha$ (naprzeciw boku $90^\circ - \beta$).

Oto skrócony zapis ścisłych transformacji współrzędnych tych układów w obie strony:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \epsilon \sin \beta \\ \tan \alpha &= \frac{\cos \epsilon \sin \lambda - \sin \epsilon \tan \beta}{\cos \lambda} \\ \sin \beta &= \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\ \tan \lambda &= \frac{\cos \epsilon \sin \alpha + \sin \epsilon \tan \delta}{\cos \alpha} \end{aligned} \tag{2.3}$$



Rys. 2.6 Trójkąt sferyczny wiążący współrzędne ekliptyczne i równikowe równonocne

2.4 Efekty wpływające na zmiany współrzędnych

Przy opracowywaniu obserwacji astronomicznych, aby mogły być porównywane z innymi albo z obliczeniami teoretycznymi, muszą być one poprawione na szereg czynników. Zmiany współrzędnych mogą pochodzić od zjawisk fizycznych (np. refrakcja) lub efektów projekcji (np. paralaksa). Większość z nich objawia się przesunięciem danego obiektu w jednej płaszczyźnie i można je uwzględnić przez poprawienie tylko jednej z dwóch współrzędnych w odpowiednim układzie i następnie transformację poprawionych wartości do układu końcowego. Natomiast zjawiska typu precesji, nutacji czy ruchów bieguna powodują przesuwanie się całej siatki współrzędnych i poprawianie współrzędnych zwykle polega na transformacji układów sferycznych: początkowego do zmienionego. Do wyprowadzenia wzorów uwzględniających opisywane efekty na ogół wystarcza znajomość opisanych już metod przekształcania współrzędnych.

Zwykle obserwacje redukuje się do obserwatora usytuowanego w środku poruszającej się Ziemi. Pozycję ciała niebieskiego sprowadzoną do takiego obserwatora nazywa się *widomą* albo *pozorną* (ang. *apparent place*). W praktyce taka redukcja polega na usunięciu wpływu refrakcji, aberracji dobowej i paralaksy dobowej. Eliminując dalej ze współrzędnych widomych efekty aberracji rocznej (ewentualnie także planetarnej) i nutacji dostaje się położenia *średnie*

(ang. *mean places*) dla epoki obserwacji. Wreszcie, uwzględniając jeszcze precesję obserwowane położenie można sprowadzić do innej epoki (np. J2000).

2.4.1 Refrakcja atmosferyczna

Na skutek ugięcia światła przy przechodzeniu z próżni kosmicznej przez atmosferę do powierzchni Ziemi obserwator widzi obiekty pozaatmosferyczne nieco wyżej nad horyzontem niż są w rzeczywistości. Jeśli obserwowany obiekt znajduje się wyżej niż około 20° , to w celu oceny refrakcji możemy posłużyć się wzorem Laplace'a (por. Woolard i Clemence 1966):

$$r = 3438' \cdot a_o \cot h_{obs} [(1 - b_o) - (b_o - \frac{1}{2}a_o) \cot^2 h_{obs}], \quad (2.4)$$

gdzie

$$a_o = 0,0002927 \cdot \frac{P}{1013,25} \cdot \frac{273,15}{\theta + 273,15}, \quad b_o = 0,001254 \cdot \frac{\theta + 273,15}{273,15}$$

zaś P i θ oznaczają ciśnienie atmosferyczne w hektopaskalach (hPa; albo milibarach, mb; $1013,25 \text{ hPa} = 760 \text{ mm Hg}$) i temperaturę otoczenia w stopniach skali Celsjusza w miejscu obserwacji. W przypadku warunków normalnych (ciśnienie $1013,25 \text{ hPa}$, temperatura 0° C) mamy:

$$r = 60,29'' \cot h_{obs} - 0,06687'' \cot^3 h_{obs} \approx 1' \cot h_{obs}. \quad (2.5)$$

Rzeczywistą wysokość obiektu obliczymy odejmując wartość refrakcji od wysokości obserwowanej:

$$h = h_{obs} - r.$$

Dla obserwacji w sąsiedztwie horyzontu stosuje się inne przybliżenia, które zawodzą jednak przy samym horyzoncie, gdzie występują duże i trudne do przewidzenia wahania refrakcji. Na ogół przyjmuje się, że

średnia wartość refrakcji na horyzoncie wynosi $34'$.

Almanac for Computers 1990 podaje następujący wzór empiryczny dla pełnego zakresu h_{obs} (0 do 90°) dla standardowych warunków atmosferycznych ($\theta = 10^\circ \text{ C}$, $P = 1010 \text{ hPa}$):

$$r_{stand} = \cot(h_{obs} + \frac{7,31}{h_{obs} + 4,4}), \quad (2.6)$$

gdzie h_{obs} wyrażone jest w stopniach, a wynik dostaje się w minutach łuku ($'$). Dla innych warunków ($-20^\circ \text{ C} < \theta < +40^\circ \text{ C}$, $970 \text{ hPa} < P < 1050 \text{ hPa}$) z dokładnością $0,2'$ można posłużyć się takim przeskalowaniem:

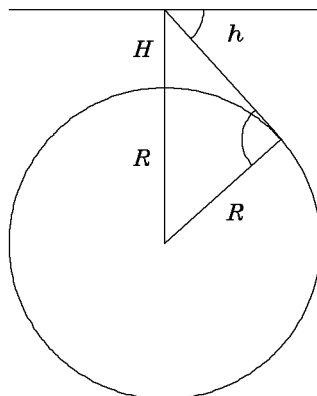
$$r = \frac{(P - 80) \cdot r_{stand}}{930 \cdot [1 + 8 \cdot 10^{-5}(r_{stand} + 39)(\theta - 10)]}. \quad (2.7)$$

2.4.2 Obniżenie horyzontu

W niektórych pomiarach wysokości względem fizycznego horyzontu (tak, jak np. sekstansem na morzu) trzeba uwzględnić kulistość Ziemi. Wynikające z tego obniżenie horyzontu fizycznego względem astronomicznego (tj. płaszczyzny prostopadłej do pionu) wynosi

$$\Delta h = 1,8' \sqrt{H}, \quad (2.8)$$

gdzie wysokość instrumentu (oczu obserwatora) nad powierzchnią Ziemi (morza) H wyrażono w metrach, a poprawkę wysokości (którą należy odjąć od wyniku pomiaru, h_{obs}) — w minutach łuku. Wzór ten, prócz efektu czysto geometrycznego, uwzględnia niewielkie zakrzywienie drogi promieni wskutek refrakcji atmosferycznej.



Rys. 2.7 Obniżenie horyzontu (Δh) można ocenić z relacji (wynikającej z twierdzenia sinusów): $R / \sin(90^\circ - \Delta h) = R + H$, gdzie R jest promieniem Ziemi. Ze względu na małość obniżenia i wielkości H/R zależność tą łatwo upraszcza się do $\Delta h \sim \sqrt{H}$

2.4.3 Paralaksa dobowa

Skończone rozmiary Ziemi powodują paralaktyczne przesunięcie bliższych ciał niebieskich w kierunku zmniejszenia wysokości nad horyzontem. Jest to tzw. paralaksa *dobowa* (też *dzienna*) albo *geocentryczna*. Największy kąt, o jaki mogą różnić się współrzędne geocentryczne i topocentryczne (tzw. paralaksa *horyzontalna* albo *pozioma równikowa*) wynosi

$$p_o = \arcsin \frac{R}{d}, \quad (2.9)$$

gdzie R jest równikowym promieniem Ziemi, a d — odlegością ciała niebieskiego. Ogólniej, zachodzi związek:

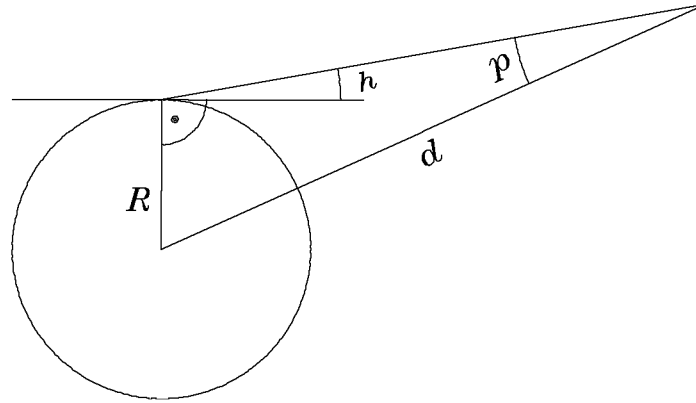
$$\sin p = \sin \frac{8,794''}{d} \cdot \cos h_{obs}, \quad (2.10)$$

gdzie d wyrażono w jednostkach astronomicznych (1 AU = 149597870 km, średnia odległość Ziemi od Słońca). Paralaksy horyzontalne Słońca i Księżyca wynoszą ok. 8,8'' i 57'3'', odpowiednio.

Paralaktyczna zmiana wysokości przenosi się na inne współrzędne. Wpływ paralaksy na współrzędne równikowe dla dużych odległości d (Słońce, planety, gwiazdy) zwykle ocenia się z następującego przybliżenia:

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' &= \frac{8,794''}{d} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \sin t \\ \delta - \delta' &= \frac{8,794''}{d} \cdot (\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t)\end{aligned}\quad (2.11)$$

gdzie primami ($'$) oznaczono współrzędne topocentryczne.



Rys. 2.8 Rzeczywista wysokość obiektu niebieskiego jest mniejsza od geocentrycznej o kąt, p (paralaksy), pod jakim widać z niego promień wodzący poprowadzony ze środka Ziemi do obserwatora

Dla obiektów bliższych (np. dla Księżyca) oraz gdy wymagana jest bardzo duża dokładność właściwą procedurą będzie transformacja ściśła, która ma postać:

$$\begin{aligned}d \cos \delta \cos \alpha &= d' \cos \delta' \cos \alpha' + R \cos \varphi' \cos T_{\star} \\ d \cos \delta \sin \alpha &= d' \cos \delta' \sin \alpha' + R \cos \varphi' \sin T_{\star} \\ d \sin \delta &= d' \sin \delta' + R \sin \varphi'\end{aligned}\quad (2.12)$$

gdzie T_{\star} jest czasem gwiazdowym, R — promieniem Ziemi w miejscu obserwacji, a φ' — szerokością geocentryczną.

2.4.4 Paralaksa roczna

W większej skali, przy zmianach położenia obserwatora na orbicie okołosłonecznej, mamy tzw. paralaksę *roczną* albo *heliocentryczną*. Jeśli odległość gwiazdy wynosi d jednostek astronomicznych (AU) i widzimy ją pod kątem θ względem Słońca to jej przesunięcie paralaktyczne wynosi

$$p = \arcsin \frac{\sin \theta}{d} \quad (2.13)$$

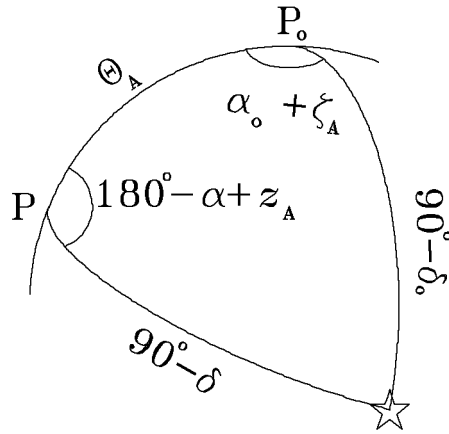
w kierunku Słońca. Maksymalna wartość paralaksy heliocentrycznej w ciągu roku przypada dla $\theta = 90^\circ$:

$$p_0 = \arcsin \frac{1}{d} \approx \frac{1}{d} \text{ rad} = \frac{206265''}{d} \equiv \frac{1}{D},$$

gdzie przez D oznaczyliśmy d wyrażone w *parsekach* ($1 \text{ pc} = 206265 \text{ AU} = 3,0857 \cdot 10^{13} \text{ km} = 3,26 \text{ lat świetlnych}$; jest to więc odległość, z której 1 AU widoczna jest pod kątem $1''$). Gwiazda najbliższa Słońca, *Proxima Centauri*, ma największą paralaksę roczną: $0,751''$ (odległość $4,34 \text{ lat świetlnych}$ albo $1,33 \text{ pc}$). Sposób pomiaru odległości bliższych gwiazd z analizy ich rocznych ruchów paralaktycznych na tle gwiazd odległych nazywa się metodą paralaks *trygonometrycznych*.

2.4.5 Precesja

Z powodu grawitacyjnego oddziaływania Księżyca, Słońca i planet na niesferyczną Ziemię, tak w ruchu wirowym wokół własnej osi, jak i po ekliptyce, zmieniają swe położenie zarówno równik niebieski (rotacja punktu równonocy wzdłuż ekliptyki z okresem ok. 26000 lat przy zgrubsza ustalonym nachyleniu równika do ekliptyki) jak i ekliptyka (oscylacje płaszczyzny z amplitudą ok. $0,85^\circ$ wokół średniego położenia). Zmiany te odbijają się we współrzędnych równikowych i ekliptycznych.



Rys. 2.9 Wpływ precesji (kąty ζ_A , z_A oraz θ_A) na współrzędne równikowe (α , δ ; wskaźnik \circ oznacza wartości przed precesją)

Precesyjne zmiany współrzędnych równikowych (dla ekliptycznych istnieją inne związki; np. Montenbruck 1989, *Connaissance des Temps* 1991) między dwoma epokami określonymi przez daty juliańskie (patrz p. 3.3) JD_0 (stare współrzędne) i JD (poszukiwane nowe wartości) można w pełni scharakteryzować trzema kątami:

$$\begin{aligned} \zeta_A &= (2306,218 + 1,397 \cdot T_0) \cdot T + 0,302 \cdot T^2 + 0,018 \cdot T^3 \\ z_A &= \zeta_A + 0,793 \cdot T^2 \\ \theta_A &= (2004,311 - 0,853 \cdot T_0) \cdot T - 0,427 \cdot T^2 - 0,042 \cdot T^3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie $T_0 = (JD_0 - 2451545)/36525$ lub ilość wieków juliańskich, które upłynęły od roku 2000 (np., dla epoki 1950 $T_0 = -0,5$), $T = (JD - JD_0)/36525$, a wszystkie współczynniki liczbowe wyrażono w sekundach łuku (w tych jednostkach dostaje się też wartości obliczanych kątów). Pełne wzory (Lieske i in. 1977) zawierają jeszcze kilka składników o wartościach mniejszych niż $0,0004''$ razy $T_0^2 T$ lub $T_0 T^2$.

Współrzędne z epoki JD_0 (α_0, δ_0) i JD (α, δ) wiąże ściśle transformacja:

$$\begin{aligned}\alpha &= z_A + \arctan \frac{\sin(\alpha_0 + \zeta_A)}{\cos \theta_A \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \tan \delta_0 \sin \theta_A} \\ \delta &= \arcsin[\sin \theta_A \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta_A \sin \delta_0],\end{aligned}\quad (2.15)$$

gdzie — w pierwszym równaniu — ćwiartkę wyniku funkcji \arctan wybieramy zgodnie ze znakami licznika i mianownika jej argumentu tak, jak to już zaznaczaliśmy przy okazji transformacji układów współrzędnych.

W wielu zastosowaniach przydatne są formuły przybliżone:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \alpha_0 + (\zeta_A + z_A) + \theta_A \tan \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \delta &\approx \delta_0 + \theta_A \cos \alpha_0,\end{aligned}\quad (2.16)$$

które, chociaż dość często stosowane, nie nadają się jednak na dłuższe interwały czasu ani dla dużych deklinacji.

2.4.6 Nutacja

Precesja uwzględnia tylko wiekowe zmiany położenia równika niebieskiego (stąd mówimy o średnim równiku epoki). Niewielkie wahania równika wokół średniego położenia są wywołane oddziaływaniem Księżyca na nieco spłaszczoną bryłę Ziemi, w przybliżeniu na kształt elipsoidy obrotowej, i dlatego mają okresy związane z ruchem orbitalnym Księżyca wokół Ziemi. Dla opisanie nutacji, bo o niej tu mowa, potrzeba dwóch wielkości: różnicy w nachyleniu równika rzeczywistego i średniego do ekliptyki, $\Delta\epsilon$, oraz różnicy położenia punktów przecięcia równików (prawdziwego i średniego; tj. punktów równonocy) z ekliptyką, $\Delta\psi$.

Współczesna teoria nutacji uwzględnia te dwie wielkości w postaci sumy 106 sinusoidalnych członów o różnych amplitudach i okresach (Wahr 1981, Seidelmann 1982, Melbourne i in. 1983). W wielu praktycznych zastosowaniach wystarczy uwzględnić tylko kilka największych składników owych sum. Oto przybliżenia zawierające człony o amplitudach większych od ok. $0,1''$ (suma amplitud opuszczonych składników w $\Delta\psi$ i $\Delta\epsilon$ wynosi około $0,34$ i $0,11''$, odpowiednio, i jest to miarą dokładności tych wzorów):

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= -17,2 \sin \Omega + 0,206 \sin 2\Omega - 1,319 \sin 2L - 0,227 \sin 2l + 0,143 \sin M \\ \Delta\epsilon &= 9,203 \cos \Omega - 0,090 \cos 2\Omega + 0,574 \cos 2L + 0,098 \cos 2l\end{aligned}\quad (2.17)$$

gdzie współczynniki liczbowe wyrażono w sekundach łuku oraz

$$\begin{aligned}\Omega &= 125,045^\circ - 1934,136^\circ \cdot T && \text{średnia długość węzła orbity Księżyca} \\ L &= 280,466^\circ + 36000,770^\circ \cdot T && \text{średnia długość Słońca} \\ l &= 218,316^\circ + 481267,881^\circ \cdot T && \text{średnia długość Księżyca} \\ m &= 134,963^\circ + 477198,867^\circ \cdot T && \text{średnia anomalia Księżyca} \\ M &= 357,528^\circ + 35999,050^\circ \cdot T && \text{średnia anomalia Słońca}\end{aligned}$$

w których $T = (JD - 2451545)/36525$, a JD jest juliańską datą epoki obserwacji (epoki, dla której obliczamy nutację).

Współrzędne ekliptyczne i równikowe poprawione na nutację to:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda + \Delta\psi \\ \beta' &= \beta\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \Delta\psi(\cos \epsilon_0 + \sin \epsilon_0 \sin \alpha \tan \delta) - \Delta\epsilon \cos \alpha \tan \delta \\ \delta' &= \delta + \Delta\psi \sin \epsilon_0 \cos \alpha + \Delta\epsilon \sin \alpha\end{aligned}\tag{2.19}$$

gdzie średnie nachylenie równika do ekliptyki wynosi

$$\epsilon_0 = 23^\circ 26' 21,45'' - 46,82'' \cdot T\tag{2.20}$$

a poprawki do α i δ są tylko przybliżeniami i zawodzą w okolicy bieguna nieba [ściśle poprawki dostaje się transformując współrzędne ekliptyczne na równikowe (p. 2.3.5) z $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$].

2.4.7 Aberracja

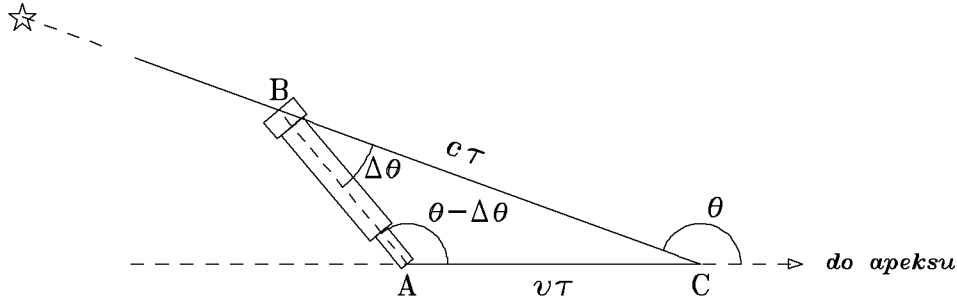
Z powodu skończonej prędkości światła obserwator poruszający się wskutek rotacji Ziemi wokół własnej osi i obiegu wokół Słońca widzi obiekty niebieskie nieznacznie przemieszczone w kierunku aktualnego ruchu obserwatora (*apeksu*). Efekt ten, zwany aberracją światła, ma analogię w przypadku piechura, który — gdy się porusza w czasie ulewy — nachyla parasol w kierunku ruchu, podczas gdy trzyma go pionowo będąc w spoczynku.

Szczególna teoria względności przewiduje, że

$$\cot(\theta - \Delta\theta) = (\cot \theta + \frac{v}{c} \csc \theta) / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\tag{2.21}$$

$$\cong \cot \theta + \frac{v}{c} \csc \theta,\tag{2.22}$$

gdzie v jest prędkością obserwatora, c — prędkością światła, a θ — rzeczywistym kątem (takim, jak go mierzy obserwator spoczywający) między wektorem prędkości obserwatora będącego w ruchu i kierunkiem obiektu. Powyższe przybliżenie staje się ścisłym w klasycznej teorii aberracji. Formułę ścisłą wyprowadził A. Einstein w 1905 r., zaś wzór klasyczny pochodzi jeszcze od J. Bradleya, z roku 1726. Postulat Einsteina o nieistnieniu fundamentalnego układu odniesienia zdawał się podważać zasadność wyводу Bradleya (rys. 2.10), jednakże ostatnie świadectwa astronomiczne, szczególnie odkrycie uniwersalnego promieniowania relikтового, sugerują, że w istocie taki układ istnieje. Byłby on związany z wielkoskalowym rozkładem galaktyk i ich gromad. Oznaczałoby to także, że światło rozchodzi się izotropowo jedynie względem układu fundamentalnego i że w rzeczywistości istnieje cały kompleks efektów anizotropii, z których jednym jest aberracja (w zasadzie w ujęciu Bradleya poprawionym o czynnik $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ wynikający z kontrakcji przestrzeni na kierunku ruchu; Prokhorovnik i Morris, 1989).



Rys. 2.10 W czasie τ , gdy promień świetlny przebiega drogę BC z prędkością c , luneta przesuwa się z prędkością v tak, że w każdej chwili promień znajduje się na jej osi symetrii. Z trójkąta ABC dostaje się klasyczną zależność $\tan(\theta - \Delta\theta) = \sin\theta / (\cos\theta + v/c)$. Ponadto, ruchomy obserwator mierzy nie $\tan(\theta - \Delta\theta)$ lecz $\sqrt{1 - v^2/c^2} \tan(\theta - \Delta\theta)$, co w pełni tłumaczy relatywistyczną formułę aberracyjną Einsteina

Różnice pomiędzy podejściem klasycznym i relatywistycznym są znikające we wszystkich praktycznych zastosowaniach. Tak więc astronomowie aberracyjną zmianę położenia obiektu obliczają z następującej zależności:

$$\sin \Delta\theta = \frac{v}{c} \sin(\theta - \Delta\theta),$$

która wynika wprost z równania (2.22) (po zamianie \cong na $=$).

Kładąc w tym wzorze za v średnią prędkość orbitalną Ziemi, przy $\theta - \Delta\theta = 90^\circ$, dostaje się *stałą aberracji*: $\Delta\theta_0 = 20,49''$. Ten składnik aberracji (tzw. aberracja *roczna*) zmienia współrzędne ekliptyczne (λ, β) o:

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda' &= 20,49'' \frac{\cos(\lambda_\odot - \lambda)}{\cos \beta} \\ \beta - \beta' &= 20,49'' \sin(\lambda_\odot - \lambda) \cdot \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie λ_\odot jest geocentryczną długością ekliptyczną Słońca. Występująca tutaj średnia prędkość nie uwzględnia eliptyczności orbity Ziemi. Przyczynek ten ma taką samą formę, jak równania (2.23) z tym, że λ_\odot jest zastąpione przez geocentryczną długość peryhelium ϖ a amplituda wynosi $20,49''e$ (e jest mimośrodem orbity Ziemi; rozdz. 6). W przypadku Słońca ($\beta = 0$) pełną aberrację opisują wzory: $\lambda_\odot - \lambda'_\odot = 20,49''[1 + e \cos(\varpi - \lambda_\odot)]$ oraz $\beta_\odot - \beta'_\odot = 0$, gdzie współrzędne 'primowane' zawierają efekt aberracji.

W praktyce (i ogólniej), katalogowe współrzędne równikowe gwiazd (α, δ) wymagają następujących poprawek aberracyjnych:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{20,49''}{\cos \delta} (\sin \lambda_\odot \sin \alpha + \cos \lambda_\odot \cos \alpha \cos \epsilon) - A_e + \frac{0,32''}{\cos \delta} \cos \varphi' \cos t \\ \delta' - \delta &= -20,49'' [\sin \lambda_\odot \sin \delta \cos \alpha + \cos \lambda_\odot (\sin \epsilon \cos \delta - \\ &\quad - \cos \epsilon \sin \delta \sin \alpha)] - D_e + 0,32'' \cos \varphi' \sin \delta \sin t \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie t jest kątem godzinnym obserwowanego obiektu, a A_e i D_e tzw. *eliptycznymi* składowymi aberracji, których źródłem jest wspomniana ekscentryczność orbity Ziemi. Przyczynki o amplitudzie $0,32''$ są wynikiem dobowej rotacji Ziemi (aberracja *dobowa*; apeks dziennego ruchu obserwatora znajduje się na horyzoncie w kierunku punktu wschodu, którego azymut wynosi 270°) zaś te o amplitudzie $-20,49''$ — obiegu Ziemi wokół Słońca.

Składowe eliptyczne są niezależne od pory roku i do 1984 r., inaczej niż dzisiaj, praktycznie zawsze były uwzględniane w katalogach średnich położen gwiazd. W astrometrii istnieje pewne zamieszanie z powodu niewłaściwego traktowania tego efektu w przeszłości (np. Smith i in. 1989). Jeśli katalog nie zawiera tej składowej aberracji (np. FK5) to należy ją dodać przy redukcji położen gwiazd do miejsc widomych. Natomiast jeśli katalog ją zawiera (np. FK4) to trzeba ją usunąć, gdy korzystamy z algorytmów uwzględniających pełny wektor prędkości Ziemi (aby nie wprowadzać podwójnie aberracji eliptycznej). Oto wzory na wartość aberracji eliptycznej:

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{0,341'' \sin(\alpha + 11,25^h)}{\cos \delta} \\ D_e &= 0,341'' \cos(\alpha + 11,25^h) \sin \delta + 0,029'' \cos \delta \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.4.8 Czas propagacji światła (aberracja planetarna)

Jest to efekt wywołany skończoną prędkością rozchodzenia się promieniowania elektromagnetycznego. Kiedy np. obserwujemy planetę to w istocie rejestrujemy pozycję jaką zajmowała w chwili odbijania światła (lub emisji własnego promieniowania). Aby określić rzeczywiste położenie obiektu trzeba znać jego prędkość przestrzenną. Ścisłe rachunki należy przeprowadzać w procesie iteracyjnym. Zwykle jednak zadowalamy się całkiem dobrym przybliżeniem prostoliniowych orbit planet w czasie propagacji światła na trasie planeta–Ziemia. W tym przypadku widoma pozycja planety we współrzędnej q (np. w rektascensji albo deklinacji) jest pozycją geometryczną pomniejszoną o

$$0,0057756 \cdot \mathcal{R} \cdot \dot{q},$$

gdzie \mathcal{R} jest odległością planety od Ziemi (w AU), \dot{q} — zmianą jej położenia w ciągu doby, a czynnik liczbowy wyraża ilość dni jaką potrzebuje światło na przebycie drogi 1 AU.

2.4.9 Ruchy własne gwiazd

Wszystkie gwiazdy Galaktyki uczestniczą w rotacji wokół środka Galaktyki, a także wykazują swoiste przemieszczenia o charakterze losowym. Składowe transwersalne (styczne do sfery niebieskiej) tych ruchów liczonych względem Słońca wpływają na współrzędne równikowe i ekliptyczne. W katalogach zwykle podaje się wiekowe zmiany w obu współrzędnych gwiazdy (typowo są to zmiany w rektascensji i deklinacji oznaczane przez μ_α i μ_δ , odpowiednio), co pozwala na korekty z epoki katalogu na epokę obserwacji. Wartości ruchów własnych są w praktyce bardzo małe i zwykle nie przekraczają kilku sekund łuku na rok. Najszybszą w tym względzie jest gwiazda *Barnarda*, która przemieszcza się po niebie z prędkością $\mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2} = 10,27''/\text{rok}$. Czyni to, że wpływ tego efektu na współrzędne możemy potraktować jako liniowe zmiany na płaszczyźnie stycznej do sfery

niebieskiej w miejscu gwiazdy. Korekty dokonujemy więc przez dodanie do współrzędnych katalogowych wartości μ pomnożonej przez upływ czasu od epoki katalogu do epoki obserwacji.

Jeśli znana jest odległość do gwiazdy, d w parsekach, wtedy prędkość tangencjalną wyliczymy ze wzoru (μ w sekundach łuku na rok): $v_t = \mu \cdot d \left[\frac{\text{AU}}{\text{rok}} \right] = 4,74 \cdot \mu \cdot d \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$.

2.4.10 Ruchy bieguna

Oś rotacji Ziemi, prócz wahań precesyjno-nutacyjnych, wykazuje niestabilności położenia względem skorupy ziemskiej. Źródeł takich niestabilności upatruje się w asymetrii rozkładu masy Ziemi względem osi rotacji (ta oś nie pokrywa się z osią bezwładności) i w zmianach (rocznych i wiekowych) tego rozkładu spowodowanych cyrkulacją mas atmosfery i hydrosfery oraz pewnymi efektami wewnątrz stałego globu ziemskiego. Obserwuje się dość regularne oscylacje położenia bieguna (o typowej amplitudzie $0,3''$, albo 9 m i okresie rzędu roku; w rzeczywistości są tam dwa wyraźne okresy: główny składnik — swobodne oscylacje Chandlera — o okresowości 1,2 lat, oraz sezonowe, tj. o rocznej cykliczności, oscylacje wymuszone przez redystrybucję mas atmosfery i oceanów) z powolnym nieregularnym dryfem na tle skorupy ziemskiej w kierunku zachodnim.

Skutkiem ruchu bieguna Ziemi astronomicznie wyznaczona pozycja miejsca obserwacji różni się od dowolnej średniej wartości wziętej na odcinku dłuższym niż rok. Trzeba więc pomiary odnieść do konwencjonalnego południka i bieguna Ziemi (CIO). Różnice w obu współrzędnych geograficznych, w sensie *aktualne minus konwencjonalne*, wynoszą (przyjmujemy cały czas $\lambda > 0$ na wschód od Greenwich):

$$\Delta\varphi = x \cos \lambda - y \sin \lambda \quad \text{oraz} \quad \Delta\lambda = +(x \sin \lambda + y \cos \lambda) \tan \varphi \quad (2.26)$$

gdzie x i y są współrzędnymi bieguna wyznaczanymi w ramach międzynarodowej służby (w sekundach łuku, $''$). Poprawki te należy odjąć od wyznaczonych współrzędnych miejsca obserwacji aby uzyskać położenie względem konwencjonalnego ziemskiego układu odniesienia. Wahania długości geograficznej obserwatoriów są uwzględniane przy wyznaczaniu czasu uniwersalnego (*UTI*, rozdz. 3).

2.4.11 Relatywistyczne ugięcie światła

Ten na ogół nieznaczący efekt wynika z grawitacyjnego oddziaływania Słońca na promieniowanie elektromagnetyczne. Przesunięcie obserwowanego obiektu następuje w płaszczyźnie obiekt–Ziemia–Słońce w kierunku od Słońca o wartość

$$0,00407'' \tan \frac{\psi}{2}, \quad (2.27)$$

gdzie ψ jest odległością kątową Ziemi i obserwowanego obiektu widzianą ze środka Słońca (np. Kaplan i in. 1989).

Zmienione tym efektem współrzędne równikowe dalekich obiektów (np. gwiazd)

można obliczyć następująco:

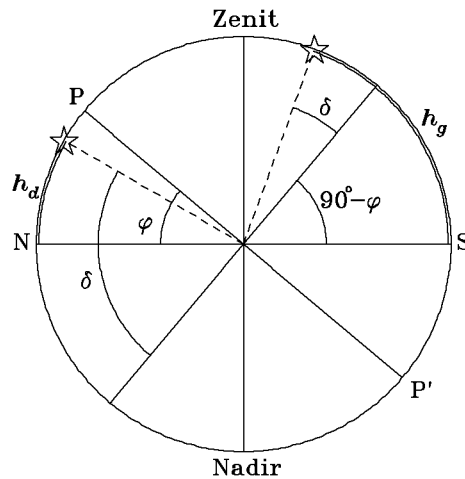
$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \frac{0,000271^s}{(1 - \cos \theta) \cos \delta} \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha - \alpha_{\odot}) \\ \delta' &= \delta + \frac{0,00407''}{1 - \cos \theta} [\sin \delta \cos \delta_{\odot} \cos(\alpha - \alpha_{\odot}) - \cos \delta \sin \delta_{\odot}],\end{aligned}\quad (2.28)$$

gdzie oznaczenie \odot dotyczy współrzędnych Słońca zaś $\cos \theta = \cos \delta \cos \delta_{\odot} \cos(\alpha - \alpha_{\odot}) + \sin \delta \sin \delta_{\odot}$.

2.5 Kulminacje

Omawiane tu zjawiska odbywają się na południku miejscowym. Wysokość *górowania* (kulminacji górnej; h_g) i *dołowania* (kulminacji dolnej; h_d) ciał niebieskich wiąże się z szerokością geograficzną miejsca obserwacji (φ) i deklinacją obiektu (δ) poprzez następujące zależności:

$$\begin{aligned}h_g &= 90^\circ - \varphi + \delta && \text{południowa strona nieba} \\ &= 90^\circ + \varphi - \delta && \text{strona północna} \\ h_d &= -90^\circ - \varphi - \delta && \text{strona południowa} \\ &= -90^\circ + \varphi + \delta && \text{strona północna}\end{aligned}$$



Rys. 2.11 Przekrój sfery niebieskiej płaszczyzną południka miejscowego ilustrujący związki wysokości górowania (h_g) i dołowania (h_d) z szerokością geograficzną (φ) i deklinacją obiektu (δ)

Te cztery wzory pozostają słuszne także na południowej półkuli Ziemi (gdzie $\varphi < 0$). Można je zapisać w bardziej zwartej formie:

$$h = + - (\varphi \mp \delta) \pm 90^\circ$$

w której znak lewy (+) bierzemy dla północnej strony nieba a prawy (−) — dla południowej, natomiast znaki górne (w \pm i \mp) zachowujemy dla górowań, a dolne dla dołowań.

2.6 Wschody, zachody, świty i zmierzchy

Momenty wschodów i zachodów ciał niebieskich określa kąt godzinny (t) tych ciał, gdy znajdują się one na horyzoncie. Kąt godzinny ciała o deklinacji δ oblicza się ze wzoru:

$$\boxed{\cos t = \frac{\sin h_o - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}}, \quad (2.29)$$

przy czym dostaje się stąd dwa rozwiązania na t , z których jedno (t_z , w pierwszej lub drugiej ćwiartce) dotyczy zachodu, a drugie ($t_w = 24^h - t_z$, trzecia lub czwarta ćwiartka) — wschodu.

W celu orientacyjnego obliczenia czasu środkowoeuropejskiego (CET , zimowego w Polsce) wschodu lub zachodu w miejscu o współrzędnych (φ, λ) możemy skorzystać z uproszczenia, w którym zaniedbano refrakcję, rozciągłość obiektu i zmiany współrzędnych równikowych w ciągu doby:

$$CET_{w/z} \approx 0,99727[\alpha - \lambda \pm \arccos(-\tan \varphi \tan \delta)] - GMST(0^h UT) + 1^h, \quad (2.30)$$

gdzie $GMST(0^h UT)$ jest średnim czasem gwiazdowym w Greenwich o północy, zaś znak $+$ należy wziąć dla zachodów, a $-$ — dla wschodów.

Obserwowana wysokość ciała nad horyzontem jest z definicji zerowa lecz rzeczywista wysokość h_o jest mniejsza o wartość refrakcji atmosferycznej przy horyzoncie:

$$h_o = -34'.$$

Taką wartość trzeba wziąć np. dla gwiazd. W przypadku Słońca i Księżyca wysokość zmniejszamy jeszcze o promień tarczy tych ciał (około $16'$):

$$h_{\odot} = -50'$$

tak, że ich wschód i zachód dotyczy właściwie górnych skrajów ich tarcz. Dla Księżyca, z powodu jego bliskości, trzeba dodatkowo uwzględnić jeszcze paralaksę horyzontalną tego ciała (średnio $p \approx 57'$) tak, że $h_K = p - \text{promień} - 34'$.

Jeśli obliczony $\cos t$ jest większy od jedności, co do wartości bezwzględnej, to oznacza to, że rozpatrywany obiekt nie osiąga horyzontu (albo nie wschodzi, albo stale przebywa nad horyzontem). Odstęp czasu między kolejnymi wschodami lub zachodami gwiazd wynosi $23^h 56^m 04^s$ (w ciągu doby słonecznej, tj. od dołowania do dołowania Słońca, mogą zatem wystąpić dwa kolejne zjawiska), a w przypadku Księżyca jest to około 25^h — tak, że mniej więcej raz na miesiąc przypada dzień, w którym nie ma wschodu i jeden dzień bez zachodu Księżyca. Trzeba też pamiętać, że współrzędne Księżyca zmieniają się bardzo szybko co powoduje, że wschody i zachody tego ciała musimy obliczać stosując kilka kolejnych przybliżeń.

Momenty początku świtu i końca zmierzchu obliczamy tak, jak wschody i zachody Słońca z tym, że na wysokość Słońca w zależności od potrzeb przyjmujemy:

$$\begin{array}{ll} h_{\odot} = -6^{\circ} & \text{świt i zmierzch cywilny} \\ h_{\odot} = -12^{\circ} & \text{żeglarski} \\ h_{\odot} = -18^{\circ} & \text{astronomiczny} \end{array}$$

Czas trwania świtu lub zmierzchu wyraża różnica kątów godzinnych Słońca przy wschodzie lub zachodzie i w chwili początku świtu lub końca zmierzchu.

2.7 Białe noce oraz dni i noce polarne

Białe noce występują wtedy, gdy Słońce po zachodzie nie zejdzie niżej pod horyzont niż granica zmierzchu (w zasadzie cywilnego). Można to ująć warunkiem:

$$\boxed{-6^\circ < h_{d\odot} < -50'}$$

gdzie $h_{d\odot} = \varphi + \delta_\odot - 90^\circ$ (dla $\varphi > 0^\circ$) lub $h_{d\odot} = -(\varphi + \delta_\odot + 90^\circ)$ (dla $\varphi < 0^\circ$), zaś prawostronne ograniczenie wymaga, by Słońce znajdowało się całą tarczą pod horyzontem (uwzględnienie refrakcji i promienia tarczy).

O polarnym dniu lub nocy mówimy wtedy, gdy Słońce w czasie swej całodobowej wędrówki po niebie nie przekracza swym górnym skrajem horyzontu. Stąd mamy warunki:

$$\begin{aligned} h_{d\odot} > -50' & \text{ albo } -89^\circ 10' + \delta_\odot > \varphi > 89^\circ 10' - \delta_\odot & \text{ dla dni polarnych} \\ h_{g\odot} < -50' & \text{ albo } -90^\circ 50' - \delta_\odot > \varphi > 90^\circ 50' + \delta_\odot & \text{ dla nocy polarnych} \end{aligned}$$

gdzie lewe strony nierówności podwójnych odnoszą się do południowej półkuli Ziemi, a prawe — do północnej.

2.8 Nasłonecznienie (insolacja)

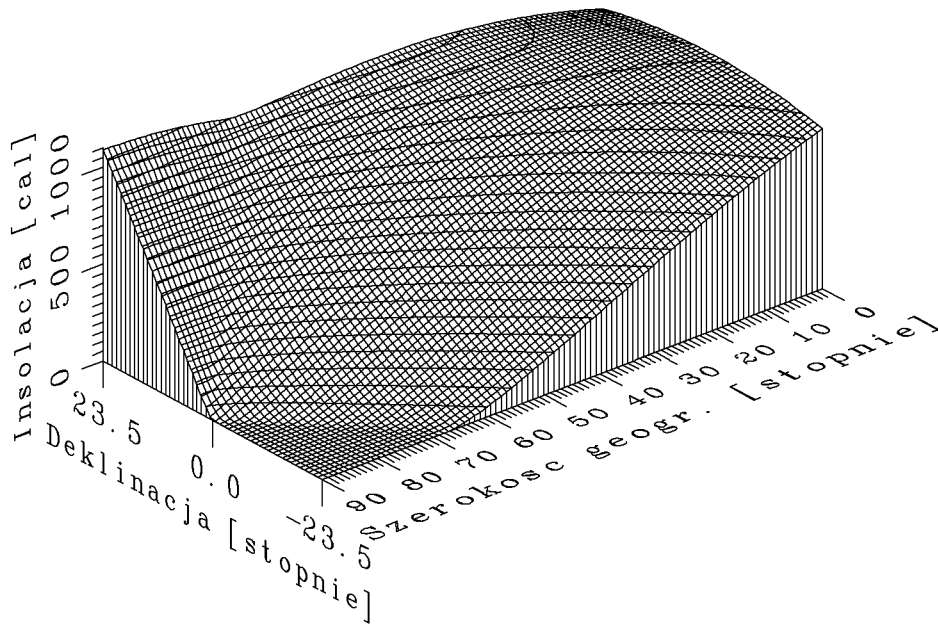
Skutkiem rocznego ruchu Słońca po ekliptyce jest zmieniająca się z cyklem rocznym długość dnia i wysokość Słońca w południe. Są to pierwszorzędne czynniki klimatotwórcze. *Stala słoneczna*, albo ilość energii promienistej jaka przechodzi przez 1 m^2 powierzchni prostopadłej do kierunku na Słońce w średniej odległości Ziemi, według niedawnych starannych pomiarów (White 1977) wynosi $1373 \pm 20 \text{ W/m}^2$. Odpowiada to ilości ciepła $1,968 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \text{ min})$ (1 kaloria to ilość ciepła potrzebna do podgrzania 1 g czystej wody od temperatury $14,5^\circ\text{C}$ do $15,5^\circ\text{C}$ i jest równa $4,1855 \text{ Ws}$). Zaniedbując przesłanianie atmosfery możemy przyjąć, że w ciągu minuty 1 cm^2 powierzchni Ziemi otrzymuje $1,968 \sin h_\odot$ kalorii. W ciągu doby tenże cm^2 zgromadzi (cal):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{t_w}^{t_z} 1,968 \sin h_\odot dt = 2 \cdot 1,968 \int_0^{t_z} (\sin \delta_\odot \sin \varphi + \cos \delta_\odot \cos \varphi \cos t) dt \\ &= 3,936 (t_z \sin \delta_\odot \sin \varphi + \cos \delta_\odot \cos \varphi \sin t_z) \frac{12 \cdot 60}{\pi} \end{aligned}$$

gdzie t_w/z są kątami godzinnymi (w radianach) Słońca przy wschodzie/zachodzie. Czynniki $12 \cdot 60/\pi$ wyraża ilość minut czasowych w radianie (229,183). Ostatecznie mamy (w kaloriach na dobę):

$$\mathcal{E} = 902,1 (t_z \sin \delta_{\odot} \sin \varphi + \cos \delta_{\odot} \cos \varphi \sin t_z). \quad (2.31)$$

Wielkość ta zależy od pory roku i położenia geograficznego i może zniknąć (noc polarna) i osiągać wartości rzędu 1200 cal. Na szerokościach Polski wartość nasłonecznienia zmienia się od nieco powyżej stu do ponad tysiąca kalorii.



Rys. 2.12 Nasłonecznienie w funkcji deklinacji Słońca i szerokości geograficznej

W praktycznych obliczeniach insolacji możemy przyjąć, że zachód Słońca przypada na wysokości $h_{\odot} = 0^{\circ}$ co znacznie uprości rachunki. Przy takim założeniu $t_z = \arccos(-\tan \delta_{\odot} \tan \varphi)$ a wzór na wartość zgromadzonej energii uprości się do:

$$\mathcal{E} = 902 \sin \delta_{\odot} \sin \varphi (t_z - \tan t_z). \quad (2.32)$$

Należy jednak pamiętać, że uproszczenia te zawodzą w pewnych sytuacjach (np. dla zerowych deklinacji Słońca i zerowych szerokości geograficznych), dlatego bezpieczniej jest korzystać ze wzoru (2.31). Przypominamy również, że $|\tan \delta_{\odot} \tan \varphi|$ nierzadko przyjmuje wartości większe od 1, co w tym przypadku implikuje $t_z = 0$ (noc polarna) lub $t_z = \pi$ (dzień polarny).

2.9 Przykłady

Przykład 2.1

Obliczyć współrzędne prostokątne punktu o następujących współrzędnych biegunowych: $R = 25$, $\theta = 40^\circ$, $\varphi = -30^\circ$.

--- ◇◇ ---

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 0,6428 & \cos \theta &= 0,7660 \\ \sin \varphi &= -0,5000 & \cos \varphi &= 0,8660\end{aligned}$$

Na podstawie wzorów podanych w p. 2.3.2 mamy

$$\begin{aligned}X &= R \cos \varphi \cos \theta = 25 \cdot 0,8660 \cdot 0,7660 = 16,584 \\ Y &= R \cos \varphi \sin \theta = 25 \cdot 0,8660 \cdot 0,6428 = 13,917 \\ Z &= R \sin \varphi = 25 \cdot (-0,5000) = -12,500\end{aligned}$$

Przykład 2.2

Obliczyć współrzędne biegunowe punktu o następujących współrzędnych prostokątnych: $X = -17,5$, $Y = -28,4$, $Z = 42,3$.

--- ◇◇ ---

Korzystamy ze wzorów podanych w p. 2.3.2:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-17,5)^2 + (-28,4)^2 + 42,3^2} = \sqrt{2902,1} = 53,871$$

$$\varphi = \arcsin \frac{Z}{R} = \arcsin \frac{42,3}{53,871} = \arcsin 0,78521 = 51,73983^\circ = 51^\circ 44' 23,4''$$

$$= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \arctan \frac{42,3}{\sqrt{(-17,8)^2 + (-28,4)^2}} = 51^\circ 44' 23,4''$$

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{Y}{X} = \arctan \frac{-28,4}{-17,5} = \arctan(1,62286) + 180^\circ = (58,35874 + 180)^\circ = \\ &= 238^\circ 21' 31,5'' \quad (Y < 0, \text{ tzn. } \sin \theta < 0 \text{ i } X < 0, \text{ tzn. } \cos \theta < 0).\end{aligned}$$

Przykład 2.3

Obliczyć współrzędne horyzontalne obiektu, którego $\delta = +10^\circ$ i $t = 2^h$ na szerokości geograficznej $\varphi = 50^\circ$.

--- ◇◇ ---

Korzystamy ze wzorów (2.2) podanych w p. 2.3.4 (s. 23):

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t = 0,17365 \cdot 0,76604 + 0,98481 \cdot 0,64279 \cdot 0,86603 = 0,68124$$

$$h = \arcsin 0,68124 = 42,94027^\circ$$

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\sin t}{-\tan \delta \cos \varphi + \sin \varphi \cos t} = \frac{0,5}{-0,17633 \cdot 0,64279 + 0,76604 \cdot 0,86603} = \\ &= \frac{+0,5}{+0,55007} = 0,90898\end{aligned}$$

$$a = \arctan 0,90898 = 42,27010^\circ$$

($\sin a > 0$, $\cos a > 0$ zatem a jest w pierwszej ćwiartce)

Przykład 2.4

Wyprowadzić wzory na obliczanie wysokości i azymutu satelity geostacjonarnego umieszczonego nad równikiem i południkiem o długości geograficznej λ_0 widzianego z miejsca o współrzędnych geograficznych φ i λ .

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Traktując Ziemię jako idealną sferę rozwiązujemy trójkąt sferyczny o wierzchołkach na północnym biegunie Ziemi, w miejscu obserwacji i w punkcie podsatelitarnym ($\varphi_0 = 0^\circ$). Stosując do tego trójkąta wzór mieszany i wzór sinusów dostaje się:
 $\sin l \cos(180^\circ - a) = -\cos(90^\circ - \varphi) \cos(\lambda - \lambda_0)$ oraz $\sin l \sin(180^\circ - a) = \sin(\lambda - \lambda_0)$
 skąd:

$$a = \arctan \frac{\tan(\lambda - \lambda_0)}{\sin \varphi}. \quad (2.33)$$

Kosinus geocentrycznego kąta pomiędzy obserwatorem i satelitą wynosi:

$$\mathcal{C} \equiv \cos l = \cos 90^\circ \cos(90^\circ - \varphi) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - \varphi) \cos(\lambda - \lambda_0) = \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0).$$

Wysokość h dostaniemy z trójkąta płaskiego o wierzchołkach w środku Ziemi, w miejscu satelity i miejscu obserwatora, którego dwa boki (odcinki ze środka Ziemi do obserwatora i do satelity, R i R_0) i kąt między nimi zawarty (l) możemy obliczyć: R wyliczymy ze wzorów podanych w p. 2.3.3 (możemy tu bezpiecznie przyjąć $R = 6371$ km), a $R_0 = 42164$ km (patrz przykł. 6.1). Łatwo zauważamy, że

$$\tan h = \frac{R_0 \cos l - R}{R_0 \sqrt{1 - \cos^2 l}} = \frac{\mathcal{C} - R/R_0}{\sqrt{1 - \mathcal{C}^2}} = \frac{\cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) - R/R_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2(\lambda - \lambda_0)}} \quad (2.34)$$

Podobne rezultaty osiągniemy ściślejszą analizą. Wybierzemy typowy układ prostokątny jednak zwrócony osią x na kierunek południka λ . Jeśli H oznacza wysokość obserwatora nad elipsoidą Ziemi a φ jest szerokością geograficzną (geodezyjną) to współrzędne kartezjańskie obserwatora i satelity będą następujące:

$$\begin{aligned} x &= a_\oplus \cos \psi + H \cos \varphi \equiv R \cos \varphi' & x_0 &= R_0 \cos(\lambda_0 - \lambda) \\ y &= 0 & y_0 &= R_0 \sin(\lambda_0 - \lambda) \\ z &= (1 - f)a_\oplus \sin \psi + H \sin \varphi \equiv R \sin \varphi' & z_0 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $a_\oplus = 6378140$ m, $f = 1/298,257$, $\psi = \arctan[(1 - f) \tan \varphi]$. Topocentryczne współrzędne satelity wynoszą więc:

$$\begin{aligned} X &= x_0 - x = R_0 \cos(\lambda_0 - \lambda) - R \cos \varphi' \\ Y &= y_0 - y = R_0 \sin(\lambda_0 - \lambda) \\ Z &= z_0 - z = -R \sin \varphi' \end{aligned} \quad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Współrzędne równikowe (topocentryczne) wyrażą się teraz przez:

$$\delta = \arcsin \frac{Z}{\rho} = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad t = \arctan \frac{-Y}{X}$$

a interesujące nas współrzędne horyzontalne — przez:

$$\tan a = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \tan \delta \cos \varphi} = \frac{\tan t / \sqrt{1 + \tan^2 t}}{\sin \varphi / \sqrt{1 + \tan^2 t} - \tan \delta \cos \varphi} = \frac{-Y}{X \sin \varphi - Z \cos \varphi}$$

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos t \cos \varphi = \frac{Z \sin \varphi + X \cos \varphi}{\rho}$$

Jest też: $\cos h \sin a = \sin t \cos \delta = -Y/\rho$. (W powyższych przekształceniach wzięliśmy $-Y$ zamiast Y , gdyż kąt godzinny mierzy się w odwrotnym kierunku niż długość geograficzną.) Podstawiając wyjściowe wielkości do otrzymanych zależności po kilku przekształceniach dostajemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{-\sin(\lambda_o - \lambda)}{\cos(\lambda_o - \lambda) \sin \varphi - \frac{R}{R_o} \sin(\varphi - \varphi')} \\ \tan h &= \frac{\cos(\lambda_o - \lambda) \cos \varphi - \frac{R}{R_o} \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\left[\cos(\lambda_o - \lambda) \sin \varphi - \frac{R}{R_o} \sin(\varphi - \varphi')\right]^2 + \sin^2(\lambda_o - \lambda)}} = \\ &= \left[\cos(\lambda_o - \lambda) \cos \varphi - \frac{R}{R_o} \cos(\varphi - \varphi')\right] \frac{-\sin a}{\sin(\lambda_o - \lambda)}. \end{aligned}$$

Nietrudno jest zauważyć, że jeśli przyrównamy szerokości geocentryczną z geodezyjną (tj. gdy $\varphi' = \varphi$) to wzory te upraszczają się do (2.33) i (2.34).

Przykład 2.5

Na jaki kierunek powinni nacelować swoje anteny do odbioru telewizji z satelitów ASTRA ($\lambda_A = 19,2^\circ\text{E}$) i TV-SAT ($\lambda_T = 19,0^\circ\text{W}$) użytkownicy zamieszkali w Toruniu ($\lambda = 18,55^\circ\text{E}$, $\varphi = 53^\circ\text{N}$)?

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Korzystamy ze wzorów (2.33) i (2.34) z poprzedniego przykładu. Dla ASTRY mamy:

$$\begin{aligned} a_A &= \arctan \frac{\tan(18,55^\circ - 19,2^\circ)}{\sin 53^\circ} = \arctan(-0,014206) = -0,813899^\circ \quad \text{albo} \\ a_A &= -0,814^\circ + 360^\circ = 359,186^\circ = 359^\circ 11' \\ \frac{R}{R_o} &= \frac{6371}{42164} = 0,151100 & \mathcal{C} &= \cos 53^\circ \cos(-0,65^\circ) = 0,601776 \\ \tan h_A &= \frac{\mathcal{C} - R/R_o}{\sqrt{1 - \mathcal{C}^2}} = \frac{0,450676}{0,798665} = 0,564287 = \tan 29,43548^\circ. \end{aligned}$$

Podobnie dla TV-SATa:

$$\begin{aligned} a_T &= \arctan \frac{\tan 37,55^\circ}{\sin 53^\circ} = \arctan 0,962535 = 43,906342^\circ = 43^\circ 54' \\ \mathcal{C} &= \cos 53^\circ \cos(37,55^\circ) = 0,477132 \\ h_T &= \arctan \frac{0,326032}{0,878832} = \arctan 0,370984 = 20,3540^\circ \end{aligned}$$

Otrzymane wysokości możemy chcieć poprawić jeszcze na efekt refrakcji:

$$\begin{aligned} h_{obsA} &\approx h_A + \frac{1'}{\tan h_A} = h_A + \frac{1^\circ}{60 \tan h_A} = \left(29,43548 + \frac{1}{60 \cdot 0,564287}\right)^\circ = 29,46502^\circ = \\ &= 29^\circ 28' \\ h_{obsT} &\approx h_T + \frac{1^\circ}{60 \tan h_T} = \left(20,3540 + \frac{1}{60 \cdot 0,370984}\right)^\circ = 20,3989^\circ = 20^\circ 24' \end{aligned}$$

Chociaż w praktyce nie ma potrzeby tak dokładnych obliczeń, dla porównania zastosujemy ściśle wzory (podane w p. 2.3.3 i P. 2.4) uwzględniające eliptyczność Ziemi.

Kolejno dostajemy:

$$\varphi - \varphi' = \arctan \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi} \tan \varphi \right) = \arctan \frac{f(2-f) \tan \varphi}{1 + (1-f)^2 \tan^2 \varphi} = \\ = \arctan 0,003231325 = 0,1851406^\circ$$

$$R = a_{\oplus} \sqrt{\frac{1 + (1-f)^4 \tan^2 \varphi}{1 + (1-f)^2 \tan^2 \varphi}} = 6378140 \sqrt{0,99574059} \text{ m} = 636452 \text{ m}$$

$$\frac{R}{R_{\odot}} \sin(\varphi - \varphi') = 0,1509473 \cdot 0,00323131 = 0,00048776$$

$$\frac{R}{R_{\odot}} \cos(\varphi - \varphi') = 0,1509473 \cdot 0,99999478 = 0,15094651$$

$$a_A = \arctan \frac{-0,0113443}{0,7980963} = -\arctan 0,014214 = -0,814366^\circ = -0^\circ 48' 52''$$

$$a_T = \arctan \frac{+0,6094535}{0,6326878} = +\arctan 0,963277 = 43,928405^\circ = 43^\circ 55' 42''$$

$$h_A = \arctan \frac{0,450830}{0,798177} = \arctan 0,564825 = 29,458827^\circ$$

$$h_T = \arctan \frac{0,32618556}{0,878480} = \arctan 0,371307 = 20,370297^\circ$$

Widzimy, że te dokładniejsze wyliczenia różnią się minimalnie od przybliżonych: o mniej niż 2' w obu współrzędnych horyzontalnych. Różnice takie są zanedbywalne wobec dużo większej tolerancji wynikającej z parametrów anten do odbioru telewizji satelitarnej [szerokość wiązki charakterystyki kierunkowej 80-centymetrowego paraboloidu na częstotliwości 11,2 GHz wynosi około $c/(11,2 \cdot 10^9 \cdot 0,80)$ rad = $1,91706^\circ \approx 115'$, gdzie c jest prędkością światła w m/s].

Przykład 2.6

Obliczyć orientacyjną długość dnia w najdłuższy i najkrótszy dzień roku w Toruniu ($\varphi = 53^\circ$) przyjmując nachylenie równika do ekliptyki $\epsilon = 23,5^\circ$.

--- ◇◇ ---

Długość dnia wyraża się podwojonym kątem godzinnym zachodu Słońca. Skrajne wartości deklinacji Słońca ($\pm\epsilon$) odpowiadają skrajnym długościom dnia. Mamy więc w przybliżeniu:

$$\cos t = -\tan \varphi \tan \delta = -\tan 53^\circ \tan(\pm 23,5^\circ) = \mp 0,577015$$

$$2t_+ = 2 \arccos(-0,577015) = 2 \cdot 125,24^\circ = 16^h 42^m \quad \text{— najdłuższy dzień roku}$$

$$2t_- = 2 \arccos(+0,577015) = 2 \cdot 54,76^\circ = 7^h 18^m \quad \text{— najkrótszy dzień roku}$$

Przykład 2.7

Obliczyć azymut i kąt godzinny Słońca w momencie wschodu w Toruniu ($\varphi = 53,1^\circ$) w czasie, gdy $\delta_{\odot} = -22,5^\circ$.

--- ◇◇ ---

Dla wschodów i zachodów Słońca przyjmujemy wysokość Słońca $h = -50'$. Jeden ze wzorów dla trójkąta paralaktycznego (2.1) ma postać:

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a$$

Mamy więc:

$$\cos a = \frac{\sin(-50') \sin 53,1^\circ - \sin(-22,5^\circ)}{\cos 53,1^\circ \cos(-50')} = \frac{-0,01454 \cdot 0,79968 + 0,38268}{0,60042 \cdot 0,99989} = \frac{0,37105}{0,60036} =$$

$$= 0,61805$$

Zatem $a = 51,8261^\circ$ albo $a = 308,1739^\circ$; wybieramy drugą możliwość ($308,17^\circ$), gdyż zjawisko (wschód) odbywa się po wschodniej stronie nieba (gdzie $180^\circ < a < 360^\circ$).

Podobnie, z (2.2), mamy:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{-0,01454 - 0,79969 \cdot (-0,38268)}{0,60042 \cdot 0,92388} = \frac{0,29148}{0,55472} = 0,52546,$$

a więc $t = 58,30065^\circ = 3^h 53,2^m$ bądź $t = 24^h - 3^h 53,2^m = 20^h 06,8^m$. Wybierzemy drugie rozwiązanie ($20^h 6,8^m$), gdyż zjawisko odbywa się na wschodniej półkuli nieba.

Alternatywnie, możemy użyć wzoru na $\tan t$ podanego w p. 2.3.4:

$$\begin{aligned} \tan t &= \frac{\sin a}{\tan h \cos \varphi + \sin \varphi \cos a} = \frac{\sin 308,17387^\circ}{-0,014545 \cdot 0,60042 + 0,79968 \cdot 0,61805} = \\ &= \frac{-0,78614}{+0,48551} = -1,61920, \end{aligned}$$

ponieważ $\sin t < 0$ oraz $\cos t > 0$, więc t leży w ostatniej ćwiartce i zatem mamy

$$t = 360^\circ - \arctan 1,61920 = 360^\circ - 58,3009^\circ = 301,6991^\circ = 20,11327^h = 20^h 6,8^m$$

Uwaga: W praktyce poprzestalibyśmy naturalnie na pierwszym sposobie obliczenia t (z $\cos t$), gdyż drugi wzór opiera się na obliczanej wielkości (a), co powoduje że ewentualne błędy obliczenia albo zaokrąglenia a przenoszą się na t (nie jest to specjalnie groźne, gdy posługujemy się komputerem lub kalkulatorem bez zaokrąglenia wartości pośrednich).

Przykład 2.8

Rozwiązać poprzedni problem (przykład 2.7) lecz dla momentu zachodu i w czasie przesilenia letniego ($\delta_\odot = +23,5^\circ$).

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{-0,014544 \cdot 0,79968 - 0,39875}{0,60042 \cdot 0,99989} = \frac{-0,41038}{0,60036} = -0,68356 \\ a &= 133,12243^\circ \text{ lub } a = 360^\circ - 133,12243^\circ = 226,87757^\circ. \end{aligned}$$

Wybieramy pierwsze rozwiązanie ($133,12^\circ$), gdyż zjawisko (zachód) odbywa się po zachodniej stronie nieba (na której $0^\circ < a < 180^\circ$).

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{-0,01454 - 0,79969 \cdot 0,39875}{0,60042 \cdot 0,91706} = \frac{-0,33420}{0,55062} = -0,60553 \\ t &= 127,267^\circ = 8,4845^h = 8^h 29,1^m \quad \text{albo} \\ \tan t &= \frac{0,72989}{-0,014545 \cdot 0,60042 + 0,79968 \cdot (-0,68356)} = \frac{+0,72989}{-0,55537} = -1,31426 \\ (\sin t > 0, \cos t < 0 \implies t \text{ w drugiej ćwiartce}) \\ t &= 180^\circ - 52,7331^\circ = 127,2669^\circ = 8,4845^h = 8^h 29,1^m. \end{aligned}$$

Przykład 2.9

Kiedy występują dni i noce polarne na Spitsbergenie ($\varphi = 77^\circ \div 81^\circ$) w 1990 r.?

Dla dni polarnych rozwiązujemy warunek:

$$\delta_\odot > h_d + 90^\circ - \varphi = 89^\circ 10' - (77^\circ \div 81^\circ) = 12^\circ 10' \div 8^\circ 10'$$

W roczniku astronomicznym znajdujemy, że Słońce osiąga obliczoną deklinację $8^\circ 10'$ ($12^\circ 10'$) 11 (22) kwietnia i 1 września (21 sierpnia). Między tymi datami trwa tam dzień polarny.

Dla nocy polarnej mamy:

$$\delta_\odot < h_g - (90^\circ - \varphi) = -90^\circ 50' + (77^\circ \div 81^\circ) = -13^\circ 50' \div -9^\circ 50'.$$

Deklinacje Słońca są mniejsze od podanych w okresie do 12 ($-13^\circ 50'$) lub 24 stycznia

($-9^{\circ}50'$) oraz po 30 lub 19 października (odpowiednio).

Przykład 2.10

Gdzie wystąpią noce polarne dnia 30 I 2000 r. ($\delta_{\odot} = -17^{\circ}47'$)?

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

O tej porze roku noce polarne występują na półkuli północnej. Dla tego zjawiska mamy warunek, który daje od razu rozwiązanie:

$$\varphi > 90^{\circ}50' + \delta_{\odot} = 90^{\circ}50' - 17^{\circ}47' = 73^{\circ}3'$$

W dniu tym noc polarna panuje wszędzie powyżej równoleżnika $73^{\circ}3'$ szerokości północnej.

Przykład 2.11

Kiedy występowały białe noce w sensie zmiernicy astronomicznej w Gdańsku ($\varphi = 54^{\circ}22'$) w roku 1988?

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Warunek na wysokość dołowania Słońca podczas białej nocy: $-18^{\circ} < h_d < -50'$. Ponieważ $h_d = \delta_{\odot} - 90^{\circ} + \varphi$ mamy stąd kolejno:

$$\begin{aligned} -18^{\circ} < \delta_{\odot} - 90^{\circ} + \varphi < -50' \\ -18^{\circ} + 90^{\circ} - \varphi < \delta_{\odot} < -50' + 90^{\circ} - \varphi \\ 17^{\circ}38' < \delta_{\odot} < 34^{\circ}48' \end{aligned}$$

co oznacza, że zjawisko było obserwowalne, gdy $\delta_{\odot} > 17^{\circ}38'$ (prawy warunek zawsze jest spełniony), tj. w dniach od 10 maja do 2 sierpnia.

Przykład 2.12

Na równoleżniku $\varphi = 50^{\circ}$ zmierzono wysokość gwiazdy w czasie jej górowania po stronie południowej $h_{obs} = 15^{\circ}$. Uwzględniając refrakcję obliczyć deklinację gwiazdy (przyjąć standardowe warunki atmosferyczne).

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

$$r_s = 1' \cot\left(15^{\circ} + \frac{7,31^{\circ}}{15 + 4,4}\right) = \frac{1'}{\tan 15,377^{\circ}} = 3,64'$$

(korzystając z bardziej uproszczonego wzoru mielibyśmy: $r_s = \frac{1'}{\tan 15^{\circ}} = 3,73'$)

$$h_s = h_{obs} - r_s = 15^{\circ} - 3,6' = 14^{\circ}56,4'$$

$$\delta_s = h_s - 90^{\circ} + \varphi = 14^{\circ}56,4' - 40^{\circ} = -25^{\circ}3,6'$$

Przykład 2.13

Poprawić wyznaczenie deklinacji z przykł. 2.12 dla ciśnienia 1020 hPa i temperatury 25°C .

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Skorzystamy ze wzoru podanego w p. 2.4.1:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(1020 - 80) \cdot r_s}{930 \cdot [1 + 8 \cdot 10^{-5}(r_s + 39)(25 - 10)]} = \frac{3421,6}{977,6} = 3,50' \\ \delta &= \delta_s - h_s + h = \delta_s + r_s - r = -25^{\circ}3,6' + 0,1' = -25^{\circ}3,5' \end{aligned}$$

Przykład 2.14

Na jakiej wysokości obniżenie horyzontu wyniesie 1° , a na jakiej $1'$?

--- ◇◇ ---

Ze wzoru (2.8) mamy: $60' = 1,8'\sqrt{H}$, czyli

$$H_1 = \left(\frac{60}{1,8}\right)^2 \text{ m} = 1111 \text{ m} \quad \text{i podobnie} \quad H_2 = \left(\frac{1}{1,8}\right)^2 \text{ m} = 0,31 \text{ m}.$$

Przykład 2.15

W pewnym dniu paralaksa horyzontalna Wenus wynosi $10,27''$. Znaleźć odległość tej planety.

--- ◇◇ ---

$$d = \frac{8,794''}{p} = 0,8563 \text{ AU} = 1,281 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Przykład 2.16

Średnia paralaksa horyzontalna Księżyca wynosi $p_o = 57'$. Jaka jest paralaksa Księżyca, gdy znajduje się on na wysokości 60° nad horyzontem?

--- ◇◇ ---

$p \cong 57' \cdot \cos 60^\circ = 28,5'$
[ściślejszym rachunkiem byłoby: $p = \arcsin(\sin 57' \cos 60^\circ) = 28,499'$].

Przykład 2.17

Przekształcić współrzędne $\alpha_o = 4^h$ i $\delta_o = 50^\circ$ z epoki B1950.0 (JD2433282,423) na epokę B1982.0 (JD2444970,174).

--- ◇◇ ---

Zgodnie z oznaczeniami w p. 2.4.5 mamy:

$$T_o = -0,500 \quad T = +0,31999$$

$$\zeta_A = 737,781'' = 0,204939^\circ$$

$$z_A = 737,862'' = 0,204962^\circ$$

$$\theta_A = 641,457'' = 0,178183^\circ$$

$$\cos \delta \cos(\alpha - z_A) = +0,317017^\circ$$

$$\cos \delta \sin(\alpha - z_A) = +0,557816^\circ$$

$$\sin \delta = +0,767034^\circ$$

$$\delta = 50,0883^\circ \quad \alpha - z_A = 60,3897^\circ \quad \alpha = 60,5946^\circ$$

Względnie duża deklinacja czyni, że przybliżone wzory (2.16) prowadzą do zauważalnie różnych wyników:

$$\alpha - a_o = 0,5938^\circ$$

$$\delta - \delta_o = 0,0891^\circ$$

Przykład 2.18

Określić prawdziwe położenie punktu Barana względem średniego oraz prawdziwe nachylenie równika do ekliptyki dnia 1.1.1982 r. (JD2444970,5).

- - - - ◇◇◇ - - - -

Postępujemy zgodnie z opisem w p. 2.4.6:

$$\begin{aligned} T &= -0,18000 \\ \epsilon &= 23^{\circ}26'29,88'' \quad (\text{średnie}) \\ l &= 350,097^{\circ} \\ m &= 279,167^{\circ} \\ \Omega &= 113,189^{\circ} \\ L &= 280,327^{\circ} \\ M &= 357,699^{\circ} \end{aligned}$$

Ostatecznie (w sekundach łuku):

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -15,810 - 0,149 + 0,465 + 0,077 - 0,006 = -15,42 \\ \Delta\epsilon &= -3,624 + 0,062 - 0,537 + 0,092 = -4,01 \\ \epsilon &= 23^{\circ}26'25,87'' \quad (\text{nachylenie prawdziwe}) \end{aligned}$$

Prawdziwy punkt Barana znajduje się $15,4''$ za (w kierunku malejących długości ekliptycznych) miejscem średnim.

Przykład 2.19

Korzystając z wyników przykładu 2.18 znaleźć prawdziwe współrzędne równikowe gwiazdy o danych współrzędnych średnich: $\alpha = 4^h$, $\delta = 30^{\circ}$.

- - - - ◇◇◇ - - - -

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \Delta\psi \cdot 1,116 - \Delta\epsilon \cdot 0,289 = -16,05'' = -1,07^s \\ \delta' - \delta &= \Delta\psi \cdot 0,199 + \Delta\epsilon \cdot 0,866 = -6,54'' \end{aligned}$$

$$\alpha' = 3^h 59^m 58,9^s \quad \delta' = 29^{\circ} 59' 53,5''$$

Przykład 2.20

Obliczyć maksymalną wartość zmiany położenia gwiazd i kwazarów na skutek ugięcia światła w polu grawitacyjnym Słońca.

- - - - ◇◇◇ - - - -

Dla bardzo odległych obiektów możemy przyjąć, że ugięcie wynosi

$$0,00407'' \tan \frac{180^{\circ} - \theta}{2} = 0,00407'' \cot \frac{\theta}{2},$$

gdzie θ jest kątem między kierunkiem obiektu i Słońca widzianym z Ziemi. Największe ugięcie wystąpi, gdy kierunek obiektu będzie styczny do powierzchni Słońca, tj. gdy $\theta = 0,25^{\circ}$. Wtedy mielibyśmy

$$\frac{0,00407''}{\tan 0,125^{\circ}} = 1,87''.$$

Przykład 2.21

W jakich granicach zmienia się insolacja w Toruniu ($\varphi = 53,1^\circ$) w przeciągu roku?

---◇◇---

Deklinacja Słońca zmienia się od $-23,5^\circ$ (zimą) do $+23,5^\circ$ (latem). Korzystając z uproszczonego rachunku (przy $h_\odot = 0^\circ$) mamy:

$$\cos t_z = -\tan \delta_\odot \tan \varphi = -\tan(\pm 23,5^\circ) \tan 53,1^\circ = \mp 0,57912,$$

skąd $t_z = 54,6116^\circ$ (zimą) oraz $t_z = 125,3884^\circ$ (latem). Dane i obliczone wartości podstawiamy do wzoru (2.32) otrzymując:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{min} &= 902 \sin(-23,5^\circ) \sin 53,1^\circ (54,6116^\circ \cdot \pi/180^\circ - \tan 54,6116^\circ) \text{ cal} = \\ &= 902 \cdot (-0,39875) \cdot 0,79968 (0,95315 - 1,40774) \text{ cal} = 131 \text{ cal} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{max} &= 902 \sin(+23,5^\circ) \sin 53,1^\circ (125,3884^\circ \cdot \pi/180^\circ - \tan 125,3883^\circ) \text{ cal} = \\ &= 902 \cdot 0,39875 \cdot 0,79968 [2,18844 - (-1,40774)] \text{ cal} = 1034 \text{ cal} \end{aligned}$$

Zatem nasłonecznienie w Toruniu zimą może sięgać 130 kalorii a latem nieco powyżej 1000 kalorii.

Rozdział 3

Rachuba czasu

W naukach fizycznych czas traktuje się podobnie jak wymiar przestrzenny. W celu wskazania punktu w takim wymiarze określa się system zliczania albo *skalę czasu*, którą definiuje początek i jednostki. Przy zliczaniu (normalnie w latach) większych interwałów czasu — zwłaszcza historycznych — często zamiast skali używa się terminu *era*. Początkiem ery jest w takim systemie *epoka*. W astronomii epoką nazywa się także moment określonego zjawiska — np. moment, do którego odnoszą się elementy orbity ciała niebieskiego. Ery są zwykle powiązane z ważnymi, rzeczywistymi (np. od panowania imperatora Rzymu Dioklecjana 29 VIII 284 r.n.e.) bądź legendarnymi (np. od stworzenia świata), wydarzeniami w dziejach ludzkości. W kulturze Zachodu dzisiaj powszechnie używanym systemem jest *nasza era* albo *nowa era* (n.e., niekiedy, zwłaszcza w literaturze anglosaskiej, AD od Anno Domini) ustalona pierwotnie na rok narodzenia Chrystusa (obecnie sądzi się, że Chrystus urodził się kilka lat przed naszą erą). Zwykle za początek naszej ery przyjmuje się rok 1 n.e., a poprzedzający go rok nazywa się 1 r.p.n.e. (rok przed naszą erą). Oznacza to, że na takiej skali brak jest roku 0, co niekiedy prowadzi do pomyłek w rachunkach o cały rok. Astronomowie przyjmują za początek naszej ery rok 1 p.n.e. nazywając go rokiem 0, zaś lata wcześniejsze opatruje się znakiem minus. Np., tradycyjnemu zapisowi 4713 r.p.n.e. w tej konwencji odpowiada -4712 r.

3.1 Jednostki czasu i jednostki kalendarzowe

1 *sekunda* (oznaczenie s lub ^s) systemu SI jest równa 9192631770 okresom promieniowania przy przejściach nadsztelnych stanu podstawowego atomu cezu 133. Inne odmiany tej jednostki to m.in.: sekunda atomowa (sekunda SI na średnim poziomie morza), sekunda słoneczna średnia i gwiazdowa. Godziny i doby są wielokrotnościami odpowiednich sekund:

$$60^s = 1^m, \quad 60^m = 1^h, \quad 24^h = 1^d$$

1 *doba* (^d) jest równa 86400 s. W szczególności: doba atomowa jest podstawową astronomiczną jednostką czasu (jeśli nie zaznaczono inaczej wszędzie dalej używa się tej jednostki), doba średnia słoneczna — to średni okres powtarzania się dnia i nocy (od dołowania Słońca do następnego dołowania), doba gwiazdowa — to odstęp (średni bądź prawdziwy) czasu pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami dowolnego obiektu o ustalonych współrzędnych równikowych (gwiazd, kwazarów).

1 *miesiąc* synodyczny — okres powtarzania się faz Księżyca (podstawa kalendarzy księżycowych; ok. $29,5306^d$).

1 *rok juliański* = $365,25^d$.

1 *rok zwrotnikowy* — okres powtarzania się pór roku (średni odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami Słońca przez te same punkty ekliptyki, np. przez punkt Υ ; współcześnie (w 2000 r.) jest równy $365,24218967^d$ i ulega skracaniu o ok. $0,5^s$ na wiek; por. p. 6.7). Jednostka ta jest podstawą kalendarzy słonecznych.

1 *rok Bessela* — odstęp czasu odpowiadający zmianie rektascensji Słońca średniego o 24^h (p. 3.4).

1 *wiek juliański* (stulecie, cy) jest równy 36525^d . *Wiek zwrotnikowy* ma $36524,218967 - 6.16 \cdot 10^{-4}T$ dni (dób), gdzie T jest liczone w wiekach juliańskich od 2000 r.

3.2 Czasy

Tradycyjnie, od zarania dziejów, czas mierzono rotacjami Ziemi względem Słońca (następstwo dnia i nocy wyznacza dobę słoneczną). Słońce widziane z Ziemi zmienia swe położenie na tle gwiazd. Oznacza to, że okres rotacji Ziemi względem ‘absolutnej’ przestrzeni (względem odległych gwiazd) ma inną wartość. Stąd bierze się rozróżnienie pomiędzy czasem *słonecznym* i *gwiazdowym*. Tak, jak położenie Słońca w ciągu dnia określa godziny czasu słonecznego, tak położenie gwiazd (a ściślej tylko punktu Barana) wyznacza czas gwiazdowy. Ten ostatni jest podstawowym w znakomitej większości obserwacji astronomicznych.

Ponieważ Słońce obiega całe niebo w ciągu jednego roku (średnio około $365,2422^d$, co jest długością roku zwrotnikowego) w kierunku przeciwnym do dziennego ruchu sfery niebieskiej, to łatwo zauważamy, że w tymże roku jest dokładnie o jeden obrót Ziemi względem gwiazd więcej niż względem Słońca ($366,2422$ dób gwiazdowych). Z bardzo dobrym przybliżeniem możemy stosować czynnik $366,2422/365,2422 = 1,0027379$ jako przelicznik słonecznych jednostek czasu na gwiazdowe. Mówimy tutaj o przybliżeniu, gdyż w rozumowaniu powyższym pominięto znaczenie powolnego ruchu precesyjnego punktu Barana (względem niego mierzy się lata zwrotnikowe) oraz niewielkie zmiany wiekowe w szybkości rotacji Ziemi wokół Słońca i wokół własnej osi.

Zupełnie niedawno okazało się, że Ziemia obraca się nierównomiernie wokół swej osi. Oprócz zwalniania wiekowego mamy do czynienia z fluktuacjami szybkości rotacji związanymi z porami roku, ruchami biegunów i pewnymi innymi zjawiskami geofizycznymi. Odkrycie tych zaburzeń czy niestabilności spowodowało wprowadzenie kolejnych mutacji czasów, a w końcu zastąpienie rotującej Ziemi o wiele stabilniejszym, *atomowym* wzorcem częstotliwości i czasu. W dalszych punktach podamy pełne zależności różnorodnych czasów zgodnie ze współczesną wiedzą i ostatnimi ustaleniami Międzynarodowej Unii Astronomicznej (IAU).

3.2.1 Definicje

Słońce średnie (\odot) to taki punkt matematyczny (fikcyjny), który porusza się po **równiku** niebieskim w tym samym kierunku co Słońce lecz **równomiernie** i z okresem równym rokowi zwrotnikowemu.

$$T_{\odot} \stackrel{\text{def}}{=} t_{\odot} + 12^h \quad \text{— czas słoneczny prawdziwy}$$

$$T_{\odot}^- \stackrel{\text{def}}{=} t_{\odot}^- + 12^h \quad \text{— czas słoneczny średni}$$

Różnicę pomiędzy czasem słonecznym prawdziwym i średnim

$$\Delta\alpha = T_{\odot} - T_{\odot}^- = \alpha_{\odot}^- - \alpha_{\odot}$$

nazywa się równaniem czasu i jest ona podawana w rocznikach astronomicznych razem z efemerydą Słońca.

$$T_{\star} \stackrel{\text{def}}{=} t + \alpha \quad \text{— czas gwiazdowy}$$

Z tych definicji wynika, że czas gwiazdowy jest rektascensją obiektów górujących (dla których $t = 0^h$) albo kątem godzinnym punktu Barana (rektascensja punktu równonocy wiosennej α_{Υ} wynosi 0^h):

$$T_{\star} = \alpha_{(\text{górowanie})} = t_{\Upsilon}$$

oraz że $T_{\star} = t_{\odot}^- + 12^h - 12^h + \alpha_{\odot}^- = T_{\odot}^- - 12^h + \alpha_{\odot}^-$, co oznacza, że czas gwiazdowy można obliczyć dla każdej chwili czasu średniego (rektascensja Słońca średniego α_{\odot}^- jest zdefiniowana).

3.2.2 Zależność od długości geograficznej, UT, GMT i czasy strefowe

Nietrudno zauważyć, że południk geograficzny obserwatora jest rzutem południka lokalnego ze sfery niebieskiej na glob ziemski (albo odwrotnie). Ponieważ kąty godzinne mierzy się od południka lokalnego, to dla dwóch obserwatorów na różnych południkach geograficznych zachodzi:

$$t_{\lambda_2} - t_{\lambda_1} = \lambda_2 - \lambda_1,$$

skąd wynika natychmiast, że także $T_{\lambda_2} - T_{\lambda_1} = \lambda_2 - \lambda_1$ dla dowolnego rodzaju czasu (słonecznych lub gwiazdowego).

Różnica czasów miejscowych jest równa różnicy długości geograficznych miejsc.

Czas słoneczny średni Obserwatorium w Greenwich (południk zerowy) nazywa się *czasem uniwersalnym* i oznacza przez UT (od ang. Universal Time); jest to zatem kąt godzinny Słońca średniego na południku Greenwich zwiększony o 12^h . W sposób oczywisty mamy więc:

$$\begin{aligned} T_{\lambda} &= T_{\text{Greenwich}} + \lambda \\ T_{\odot\lambda}^- &= UT + \lambda \\ T_{\star\lambda} &= T_{\star\text{Greenwich}} + \lambda \end{aligned}$$

GMT

W astronomicznej praktyce przed rokiem 1925 doba czasu średniego słonecznego rozpoczynała się w południe. Skala ta oznaczana była skrótem GMT (od ang. Greenwich Mean Time). Potrzeby nawigacji morskiej skłoniły astronomów do zmiany praktyki i od 1925 r. wszystkie roczniki zawierają daty liczone od północy. Pozostał jednak problem nazwy nowej skali czasu. Po pewnych perturbacjach w 1928 r. IAU zaproponowała nazwę *czas uniwersalny*, która wkrótce przyjęła się powszechnie w astronomii. W pewnych kręgach używano jednak nadal starej nazwy GMT do nowej skali czasu, a wielu jeszcze dzisiaj GMT kojarzy z *UT2* lub *UTC*. W niektórych krajach zaś nazwy tej używa się dla czasu urzędowego (Howse 1980). Obecnie w astronomii nie zaleca się stosowania w ogóle oznaczenia GMT.

Ponieważ na każdej długości geograficznej czasy miejscowe są inne, dla celów praktycznych wprowadzono podział Ziemi na strefy czasowe — średnio w odstępach 1^h albo 15° . W całej strefie obowiązuje czas słoneczny średni południka strefowego (tj. $\lambda = n \cdot 15^\circ$, gdzie $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). W praktyce taki *czas strefowy* obejmuje obszary ustalone granicami administracyjnymi lub państwowymi. Ze względów ekonomicznych na okres lata w wielu krajach dodatkowo — drogą rozporządzeń — wprowadza się czas sąsiedniej strefy czasowej; jest to tzw. *czas urzędowy* albo *letni*. W Polsce normalnie obowiązuje *czas środkowoeuropejski* (*CSE* lub *CET*, od ang. Central European Time), który jest średnim słonecznym czasem południka 15° i różni się o godzinę od uniwersalnego ($CET = UT + 1^h$) a jako czas letni wprowadza się *czas wschodnioeuropejski* ($CWE \equiv EET = UT + 2^h$; *EET* rozwija się na East European Time). Ogólnie mamy:

$$\text{czas strefowy} = UT + 1^h \cdot n_{\text{strefy}}$$

Czas letni w Polsce (w *CET*)

(od 1950 r. wg *Monitora Polskiego*; od 1996 r. ostatnie niedziele marca i października)

r.	m	d	h	m	d	h	r.	m	d	h	m	d	h	r.	m	d	h	m	d	h
1946	IV	14	0	X	7	2	1981	III	29	1	IX	27	1	1997	III	30	2	X	26	2
1947	V	4	2	X	5	2	1982	III	28	1	IX	26	1	1998	III	29	2	X	25	2
1948	IV	18	2	X	3	2	1983	III	27	1	IX	25	1	1999	III	28	2	X	31	2
1949	IV	10	2	X	2	2	1984	III	25	1	IX	30	1	2000	III	26	2	X	29	2
1957	VI	2	1	IX	29	1	1985	III	31	1	IX	29	1	2001	III	25	2	X	28	2
1958	III	30	1	IX	28	1	1986	III	30	1	IX	28	1	2002	III	31	2	X	27	2
1959	V	31	1	X	4	1	1987	III	29	1	IX	27	1	2003	III	30	2	X	26	2
1960	IV	3	1	X	2	1	1988	III	27	2	IX	25	2	2004	III	28	2	X	31	2
1961	V	28	1	X	1	1	1989	III	26	2	IX	24	2	2005	III	27	2	X	30	2
1962	V	27	1	IX	30	1	1990	III	25	2	IX	30	2	2006	III	26	2	X	29	2
1963	V	26	1	IX	29	1	1991	III	31	2	IX	29	2	2007	III	25	2	X	28	2
1964	V	31	1	IX	27	1	1992	III	29	2	IX	27	2	2008	III	30	2	X	26	2
1977	IV	3	1	IX	25	1	1993	III	28	2	IX	26	2	2009	III	29	2	X	25	2
1978	IV	2	1	X	1	1	1994	III	27	2	IX	25	2	2010	III	28	2	X	31	2
1979	IV	1	1	IX	30	1	1995	III	26	2	IX	24	2	2011	III	27	2	X	30	2
1980	IV	6	1	IX	28	1	1996	III	31	2	X	27	2	2012	III	25	2	X	28	2

Do roku 1964 czasy strefowe były czasami średnimi słonecznymi, zależnymi od rotacji Ziemi. Obecnie czasy urzędowe są czasami koordynowanymi (p. 3.2.5) południków strefowych.

3.2.3 Granica zmiany daty

Podróżnik poruszający się wzdłuż równoleżnika w kierunku ze wschodu na zachód z prędkością odpowiadającą dobowej rotacji Ziemi miałby stale tą samą godzinę czasu miejscowego (gdyby wystartował np. w południe, stale miałby Słońce w jego najwyższym położeniu nad horyzontem — na południku miejscowym). Przy przekraczaniu kolejnych granic czasu strefowego, tj. po upływie każdej godziny, musiałby cofać wskazówki swego zegara o pełną godzinę. Po pełnym okrążeniu Ziemi miałby efektywnie ten sam czas zegarowy co w chwili rozpoczęcia podróży (i taki, jaki przechowuje się w tej strefie), ale także tą samą datę — wszak przez całą podróż trwającą 24 godziny ciągle korygowany zegar nigdy nie wskazywał północy! W strefie, z której wyruszył, po powrocie jest jednak data o jeden dzień późniejsza.

W związku z sytuacjami podobnymi opisaną ustalono międzynarodową linię zmiany daty, która biegnie częściowo wzdłuż południka 180° , a częściowo w jego sąsiedztwie. Formalnie, linia taka mogłaby biec wzdłuż dowolnego południka strefowego lecz wybrane rozwiązanie wydaje się najbardziej praktyczne choćby dlatego, że granica przebiega teraz przez ocean czyli obszary niezamieszkałe. Przy przekraczaniu granicy dat z półkuli zachodniej na wschodnią (w kierunku ze wschodu na zachód) podróżujący powinien wyrwać dodatkową kartkę ze swojego kalendarza (przesunąć licznik dat w zegarku o jednostkę do przodu). I odwrotnie, przechodząc linię zmiany dat w podróży z Azji do Ameryki, trzeba wrócić do daty z poprzedniego dnia.

3.2.4 Czas uniwersalny a czas gwiazdowy

Zauważyliśmy już, że $T_\star = T_\odot - 12^h + \alpha_\odot$, a zatem czas gwiazdowy w Greenwich $GMST = UT + \alpha_\odot - 12^h$, gdzie rektascensja Słońca średniego α_\odot jest ściśle zdefiniowana jako funkcja czasu uniwersalnego. Mamy mianowicie (definicja IAU z 1981 r., Aoki i in. 1982):

$$GMST = UT + 24110,54841^s + 8640184,812866^s T + 0,093104^s T^2 - 6,2^s \cdot 10^{-6} T^3 \quad (3.1)$$

$$\approx UT \cdot 1,002737909 + 6,69737456^h + 2400,051336^h T_0 + 0,0000258622^h T_0^2$$

gdzie $GMST$ jest skrótem od Greenwich Mean Sidereal Time (średni czas gwiazdowy Greenwich), $T = (JD - 2451545)/36525$, $T_0 = (JD_0 - 2451545)/36525$, a JD i JD_0 są datami juliańskimi (p. 3.3) obliczonymi dla chwili UT i na godz. 0^{00} czasu uniwersalnego, odpowiednio. Z definicji tej wynika, że 1 *doła średnia słoneczna* jest równa $24^h 03^m 56,5553679^s + 5,1^s \cdot 10^{-6} T$ w jednostkach czasu średniego gwiazdowego. Oznacza to też, że przy przeliczaniu odstępów czasu słonecznego na gwiazdowy będziemy stosowali czynnik $1,002737909350795 + 5,9006 \cdot 10^{-11} T \cdot (1 - 0,0001 \cdot T)$, a częściej tylko składnik stały tego wyrażenia.

W związku z wprowadzeniem nowej definicji czasu gwiazdowego należy zauważyć, że wzór (3.1) nie zależy od pojęcia „Słońce średnie”, co odzwierciedla istotny fakt niezależności dobowej rotacji Ziemi od jej ruchu orbitalnego. Jednakże, ponieważ różnica rektascensji średniego Słońca według teorii Newcomba i analogicznego punktu wyznaczonego przez (3.1) pozostaje zaniedbywalnie małą w ciągu wielu stuleci, wyrażenie to można w dalszym ciągu traktować jako matematyczną definicję rektascensji Słońca średniego zmniejszonej o 12^h . To nowe określenie odpowiada średniemu ruchowi rzeczywistego Słońca na tyle dokładnie, że możemy dalej posługiwać się terminami typu „średni czas słoneczny” i „średnia doba słoneczna” w takim samym znaczeniu jak poprzednio.

Mówiliśmy tutaj o *średnim czasie gwiazdowym*, gdyż w podanej definicji nie uwzględnia się zmian kąta godzinnego wywołanych nutacyjnym wahaniem się płaszczyzny równika niebieskiego (oscylacjami punktu Υ). *Prawdziwy* (ang. apparent) czas gwiazdowy dostaje się ze średniego przez dodanie nutacji w rektascensji:

$$\boxed{GAST = GMST + \Delta\psi \cdot \cos \epsilon,} \quad (3.2)$$

gdzie $\Delta\psi$ jest omówionym w punkcie 2.4.6 przyczynkiem nutacji do zmiany długości ekliptycznej, a ϵ — nachyleniem równika do ekliptyki. Ponieważ czas gwiazdowy może być wyznaczony z obserwacji przejść gwiazd przez południk lokalny, to dla dowolnego momentu można sprawdzić bieg czasu uniwersalnego (co się w istocie regularnie czyni).

Miejscowy (lokalny) średni czas gwiazdowy w praktyce oblicza się z uproszczonych wzorów. Oto przykład, z którego wynik dostaje się w godzinach:

$$\boxed{LMST = 6,6265313 + 0,0657098232 \cdot (JD' - 2447892) + 1,0027379093 \cdot UT + \lambda,} \quad (3.3)$$

gdzie JD' jest datą juliańską w południe uniwersalne a λ — długością geograficzną. We wzorze tym zaniedbano składniki $0,093104T^2 - 6,2 \cdot 10^{-6}T^3$ występujące w (3.1), a więc w bieżącym i następnym stuleciu ma on dokładność niewiele lepszą niż 0,1 s.

3.2.5 Dalsze definicje i relacje między czasami ($UT0$, $UT1$, $UT1R$, $UT2$, TAI , UTC , ET , TDT , TDB)

$UT0$, $UT1$, $UT1R$ i $UT2$

W praktyce, w odniesieniu do obserwacji, rozróżnia się kilka mutacji czasu uniwersalnego. Czas uniwersalny *prawdziwy*, $UT0$, to ten, który wynika bezpośrednio z obserwacji czasu gwiazdowego zredukowanego do Greenwich przez odjęcie *konwencjonalnej* długości geograficznej miejsca obserwacji. Jednakże współrzędne geograficzne ulegają zmianom w związku z ruchami bieguna Ziemi (względem globu ziemskiego) i w szczególności dla długości mamy:

$$\lambda = \lambda_0 + (x \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0) \tan \varphi_0,$$

gdzie wskaźniki x i y odnoszą się do współrzędnych konwencjonalnych a x i y są chwilowymi współrzędnymi bieguna w mierze łukowej (długości geograficzne są liczone dodatnio na wschód, a y — dodatnio na zachód od Greenwich). Czas poprawiony, zwany uniwersalnym *średnim*: $UT0 - \lambda + \lambda_0$, różni się od $UT0$ nie więcej niż o $0,0035^s$, a oznacza się go przez $UT1$. **W przypadkach, kiedy jest istotne rozróżnienie który z czasów UTi winniśmy identyfikować z UT , należy wybrać tę formę, tj. $UT1$.** Np., przy obliczaniu dokładnej wartości czasu gwiazdowego wg wzoru (3.1), za UT (występujący tam jawnie oraz implícite w T) bierzemy $UT1$.

Istnieją też odmiany $UT1R$ i $UT1R'$, wprowadzone w 1979 r. zgodnie z zaleceniem IAU, w których oprócz ruchów bieguna uwzględniono także zmiany długości geograficznej wywołane przez tzw. strefową składową pływów. Na ten efekt składa się 62 wyrazy sinusoidalne o okresach od ok. 5 dni do 18 lat (Yoder i in. 1981), z których w $UT1R$ uwzględnia się 45 harmonik o okresach krótszych od 35 dni, zaś wszystkie w $UT1R'$. W przybliżeniu mamy:

$$UT1R' \approx UT1 + 0,1617^s \sin \Omega,$$

gdzie $\Omega = 125,04^\circ - 0,052954^\circ(JD - 2451545)$ jest średnią długością wstępującego węzła orbity Księżyca. Suma wartości bezwzględnych amplitud 61 wyrazów opuszczonych wynosi około $0,01^s$.

W rzeczywistości, czas $UT1$ jest jeszcze obciążony wpływem sezonowych wahań prędkości rotacji Ziemi. Ten efekt można dość dobrze wyeliminować dodając do $UT1$ wyrazy półroczne i roczne:

$$UT2 = UT1 + 0,022 \sin 2\pi\tau - 0,012 \cos 2\pi\tau - 0,006 \sin 4\pi\tau + 0,007 \cos 4\pi\tau,$$

gdzie jednostką jest sekunda, a τ wyraża się w latach Bessela (p. 3.4). Ponieważ w argumentie tym istotna jest tylko część ułamkowa można przyjąć np. $\tau = (JD - 2451544,53)/365,2422$. Poprawka na sezonowe przyczynki jest mniejsza niż $0,035^s$. Skalę $UT2$ nazywa się czasem uniwersalnym *quasi-jednostajnym*.

TAI i UTC

Elektroniczne zliczanie poszczególnych okresów oscylacji kwarcu, dostrojonych ściśle do linii emisyjnych lub absorpcyjnych atomów cezu, wodoru lub par rubidu (albo do innego źródła opartego na przejściach kwantowych) w zegarze atomowym prowadzi do odtworzenia sekundy SI. W zegarach takich sekundy są akumulowane w minuty, godziny i doby. Powstaje w ten sposób skala czasu atomowego związana z danym wzorcem. W wielu krajach specjalne instytucje prowadzą służbę czasu na bazie zegarów atomowych. Skale różnych stacji systematycznie porównuje się (w Bureau International des Poids et Mesures, BIPM, w Paryżu) w celu rachunkowego opracowania pewnej średniej skali nazywanej czasem *atomowym*, TAI (od fr. Temps Atomique International). Z tego samego opracowania wynikają rozbieżności indywidualnych skal od TAI .

Jednostką czasu atomowego jest oczywiście sekunda SI ale z zastrzeżeniem „na poziomie morza” (chód zegara atomowego zależy m.in. od natężenia pola grawitacyjnego). Czas ten jest przechowywany (mówimy: konserwowany) od lipca 1955 r. lecz na początek jego skali przyjmuje się 0^h 1 stycznia 1958 r. czasu $UT2$ — moment odpowiadający 0^h 1 stycznia 1958 r. czasu TAI . Stabilność tej skali jest ok. sześć rzędów wielkości lepsza niż skali $UT1$.

Do celów cywilnych używa się skali *koordynowanego czasu uniwersalnego* (UTC). Jest to czas, którego jednostkami są sekundy atomowe (skali TAI) ale ich zliczanie odbywa się zgodnie (z tolerancją $\pm 0,9$ s) z czasem $UT1$ (do 1972 r. czas koordynowany synchronizowano z $UT2$ z większą precyzją). W tym celu, w miarę narastania rozbieżności między TAI (albo UTC) i $UT1$ w ustalonych momentach (koniec roku lub półrocza) wprowadza się *sekundy przestępne* w zliczaniu czasu UTC . Np., sekundę przestępną wprowadzono 31 grudnia 1989 r. w taki sposób, że wskazania zegara UTC były następujące: $23^h 59^m 59^s$, $23^h 59^m 60^s$ (w 1989 r.) i $0^h 0^m 0^s$ (już w roku 1990). Skutkiem tej operacji różnica między TAI i UTC wzrosła do 25 s (poprzednie przestępne sekundy wprowadzano m.in. 31 grudnia 1987 r. i 30 czerwca 1985 r., a następna będzie wprowadzona na końcu roku 1990). W celu odnotowania jakiegoś zdarzenia, które wystąpiło w czasie trwania sekundy przestępnej proponuje się notację typu $23^h 59^m 60,3^s$. Jeśli w przyszłości zajdzie potrzeba wprowadzenia ujemnej sekundy przestępnej, to we wskazaniach zegarów zostanie pominięta 59. sekunda (po 58^s nastąpi 0^s).

ET, TDT i TDB

Czas *efemeryd*, *ET* (od ang. Ephemeris Time), jest jednostajnym czasem opartym na fizycznych prawach ruchu ciał Układu Słonecznego. W latach 1960 – 1984 był on argumentem teorii dynamicznych w astronomii. Początkiem skali *ET* określono moment w pobliżu początku kalendarzowego roku 1900, kiedy wartość średniej (geometrycznej) długości ekliptycznej Słońca wynosiła $279^{\circ}41'48,04''$. Chwili tej odpowiada ściśle 12^h czasu efemeryd w dniu 31 grudnia 1899 r. Jednostką *ET* jest sekunda *efemerydalna* równa $1/31556925,9747$ długości roku zwrotnikowego obliczonego dla wyżej określonej chwili, co implikuje równość tej sekundy z sekundą czasu słonecznego średniego. Jej długość pokrywała się też, ale tylko w przybliżeniu, z długością sekundy skali *UT* w XVIII i XIX w. Sekunda efemerydalna w latach 1960 – 1967 należała do układu SI. Systematyczne porównania efemeryd (obliczonych pozycji) Słońca, Księżycy i planet z obserwacjami i pomiarami czasu atomowego wykazały, że

$$ET - TAI = 32,184^s.$$

Ziemijski czas dynamiczny (*TDT*, od ang. Terrestrial Dynamical Time) został wprowadzony w 1984 r. jako argument teorii dynamicznych i efemeryd ciał Układu Słonecznego zamiast dotąd obowiązującego czasu efemeryd. Istotną różnicą obu tych czasów jest definicja jednostki, którą dotąd była sekunda efemerydalna, a obecnie — *doba* równa 86400 sekund atomowych. Ustalono także (*Trans. IAU 1977*), że chwila 0^h 1 stycznia 1977 r. *TAI* odpowiada ściśle dacie 1977 styczeń $1,0003725^d$ *ET* (zauważmy, że $0,0003725^d = 32,184^s$ jest też aktualną oceną różnicy *ET* – *TAI*).

Zatem, skoro jednostki są (w granicach dokładności wyznaczeń *ET*) równe i zapewniono ciągłość rachuby przy przejściu na nową definicję, skale *ET* i *TDT* można utożsamiać. W istocie obecnie wielu autorów używa oznaczenia *TDT* w sytuacjach, gdzie formalnie występuje czas efemeryd (np. McCarthy i Babcock 1986).

W praktyce też, czas dynamiczny można utożsamiać z atomowym, gdyż — prócz stałego przesunięcia — nie zaobserwowano innych różnic:

$$TDT = TAI + 32,184^s.$$

Dynamiczny czas barycentryczny (*TDB*) jest odniesiony do środka ciężkości (barycentrum) Układu Słonecznego, a nie — jak to jest w przypadku *TDT* — powierzchni Ziemi. Różnice tych dwóch czasów wynikają z efektów relatywistycznych. Z dobrym przybliżeniem mamy (w sekundach; za *Astronomical Almanac 1990*)

$$TDB = TDT + 0,001658 \sin M + 0,000014 \sin 2M,$$

gdzie anomalia średnia Słońca $M = 357,53^{\circ} + 0,9856003^{\circ}(JD - 2451545)$ a datę juliańską, *JD*, należy podać z dokładnością 2 miejsc po przecinku ($0,01^d$). Pełne wzory transformacyjne można znaleźć np. u Hellingsa (1986; por. też Moyer 1981).

Różnica między czasem dynamicznym i uniwersalnym odzwierciedla nierównomierność (zwalnianie) rotacji Ziemi i nie da się przewidzieć na dalszą przyszłość. Przeszłe różnice $\Delta T = TDT - UT$ (albo *ET* – *UT*) są znane dość dobrze do kilkuset lat wstecz, a dalej dokładność ocen systematycznie spada (dla początku naszej ery jest nie lepsza niż kilkadziesiąt minut) z powodu niewystarczającego materiału obserwacyjnego. W okresie lat 1900 – 1985 mamy z błędem kilku (1 – 2) sekund (Montenbruck 1989):

$$\Delta T = \{[(-339,84T - 516,52)T - 160,22]T + 92,23\}T + 71,28^s,$$

gdzie T jest określone tak samo, jak we wzorze (3.1). Podobne wyrażenia wielomianowe dla innych interwałów czasu podają Bielicki i Ziółkowski (1976) oraz Schmadel i Zech (1988). Dokładne wartości tych różnic są wszakże łatwo osiągalne w postaci tabel (Enslin 1981, Stephenson i Morrison 1984, McCarthy i Babcock 1986, roczniki astronomiczne).

3.2.6 Rozpowszechnianie czasu koordynowanego (*UTC*)

Dysseminacja albo rozpowszechnianie czasu uniwersalnego koordynowanego odbywa się drogą radiową. Do tego celu przeznaczono specjalne pasma (o szerokościach od 0,1 do 20 kHz) o następujących częstotliwościach środkowych: 0,02, 2,5, 5, 10, 15, 20 i 25 MHz. Kilkadziesiąt stacji na całym świecie nadaje (nie wszystkie w wymienionych pasmach) systematycznie sygnały czasu zsynchronizowane z tolerancją 1 ms z czasem *UTC* opracowywanym w BIPM. Przekaz realizowany jest w postaci impulsów sekundowych zakodowanych tak, by użytkownicy mieli szybki dostęp do *UT* z dokładnością przynajmniej 0,1 s (niektóre stacje czynią zadość dokładności 0,02 s).

Charakterystyki sygnałów czasu stacji Y3S

Nadajnik (o mocy 5 kW, na częstotliwości 4525 kHz) stacji o sygnale wywoławczym Y3S znajduje się w Neuen (Niemcy; 52°39'N, 12°55'E) i pracuje w sposób ciągły (półgodzinne przerwy zdarzają się tylko w niektórych dniach od godz. 9¹⁵ w celu konserwacji aparatury). Zwykle impulsy sekundowe trwają 0,1 s, znacznik minutowy — 0,5 s a pozostałe znaczniki wyróżnione są podwajane.

Oprócz konwencjonalnego kodu dla *DUT1* stacja ta nadaje także poprawki *dUT1* i czas, tj. godzinę i minutę *UTC*, najbliższego znacznika minutowego. m ($m < 6$) kolejnych podwójnych impulsów poczynając od 21. (dodatnia poprawka) lub od 31. (ujemna poprawka) oznacza, że *dUT1* ma wartość $m \cdot 0,02$ s ze znakiem odpowiednio do umiejscowienia wyróżnień. Czas uniwersalny oblicza się ze wzoru:

$$UT1 \approx UTC + DUT1 + dUT1$$

Znacznik 28. sekundy jest podwajany jeśli m jest parzyste (albo wynosi 0).

Czas *UTC* (godzina i minuta) jest przesyłany w postaci kodu BCD (od ang. binary coded decimal) zapisanym na ostatnich 20 znacznikach sekundowych minuty.

W celu zakodowania dodatkowych informacji w transmitowanym sygnale niektóre ze znaczników sekundowych wyróżnia się np. przez wydłużenie trwania, podwojenie impulsu albo jego modulację. Różne stacje stosują różne techniki. Nadawany sygnał na ogół zawiera wyróżnione znaczniki minutowe i niektóre z pierwszych 16 znaczników sekundowych po znaczniku minutowym. Również część z pozostałych 43 znaczników sekundowych bywa wykorzystywana do zakodowania informacji o dacie, porze doby i o poprawkach potrzebnych do wyliczenia czasu uniwersalnego. Na wspomnianych 16 znacznikach koduje się wartość

$$DUT1 \approx UT1 - UTC,$$

która podawana jest w postaci całkowitej wielokrotności 0,1 s (i z dokładnością 0,1 s). *DUT1* jest poprawką, jaką należy dodać do *UTC* aby uzyskać przybliżenie *UT1*. Dodatnia wartość *DUT1* jest zaznaczana przez wyróżnienie n ($n < 9$) kolejnych znaczników sekundowych po znaczniku minutowym. Ujemne wartości *DUT1* koduje się podobnie,

ale poczynając od znacznika 9-tej sekundy. Zdekodowana wartość $DUTI$ wynosi $n \cdot 0,1$ s ze znakiem (+ lub -) odpowiednim do miejsca wyróżnionych znaczników. Niektóre dalsze szczegóły podajemy w ramce na przykładzie jednej z niemieckich stacji dobrze słyszalnych w Polsce (Kartaschoff 1985, *Annual Report 1987*).

3.3 Dni juliańskie (JD , JED i MJD)

W 1581 r. J. Scaliger ustalił, że 3 ważne cykle zliczania lat zbiegają się (lata w każdym z nich mają numer 1) w roku 4713 p.n.e. Cykle owe to: (1) słoneczny o długości 28 lat juliańskich, po których dni tygodnia przypadają na te same daty w roku, (2) 19-letni cykl Metona (p. 7.5) i (3) 15-letni cykl indykcji rzymskiej związany z okresowym ściąganiem podatków. Tworzą one jeden długi na $15 \cdot 19 \cdot 28 = 7980$ lat okres wyznaczający tzw. erę Scaligera (w 1990 r. przypada 6703 r. tej ery).

Za Scaligerem dzień albo data juliańska, oznaczana zwykle przez JD (od ang. Julian Day number bądź łac. Julii Dies), to kolejny numer dnia poczynając rachubę od południa uniwersalnego (tj. od $12^h UT$) 1 stycznia -4712 r. (tzn. 4713 r.p.n.e.) według kalendarza juliańskiego odpowiednio rozszerzonego wstecz (dla tamtej daty w południe $JD = 0$). Momenty czasu poza południem określa część ułamkowa JD . Oczywiście, daty juliańskiej nie należy mylić z datą kalendarza juliańskiego, gdyż są to dwie całkowicie niezależne rachuby.

W niektórych zastosowaniach dotyczących współczesnych obserwacji stosuje się zmodyfikowaną rachubę:

$$MJD = JD - 2400000,5$$

(skrót od ang. Modified Julian Day), w której początek dnia przypada na północ, a zliczanie dni rozpoczyna się od 17 listopada 1858 r. (według kalendarza gregoriańskiego).

Z daty juliańskiej łatwo obliczymy dzień tygodnia:

$$\text{dzień tygodnia} = (JD + 0,5) \bmod 7$$

gdzie prawa strona równości oznacza resztę z dzielenia $JD + 0,5$ przez 7, a część całkowita obliczonej liczby wskazuje dzień (0 - poniedziałek, 1 - wtorek itd.). Część ułamkowa pomnożona przez 24 jest godziną czasu UT .

Niekiedy wygodniej posługiwać się czasem efemeryd (ziemskim dynamicznym) także w zliczaniu długich okresów. Odpowiednikiem dni juliańskich są wtedy efemerydalne dni juliańskie, JED , które liczy się tak jak JD z tym, że początkiem doby jest południe czasu efemeryd ($12^h ET$).

Jeśli przy obliczaniu T we wzorach (3.1) i (3.2) użyjemy JED zamiast JD , to otrzymamy dynamiczny czas gwiazdowy, $DMST$ i $DAST$ (od ang. Dynamical Mean/Apparent Sidereal Time) i będzie on odnosił się do zerowego południka efemerydalnego nie zaś konwencjonalnego (Greenwich). Długość efemerydalna, λ^* , różni się od geograficznej, λ , o tyle, o ile obróci się Ziemia względem gwiazd w ciągu ΔT , tj. w czasie różnicy między TDT i UT lub JED i JD :

$$\lambda^* = \lambda - 1,0027379 \cdot \Delta T.$$

Jest więc także: $GMST = DMST - 1,0027379 \cdot \Delta T$ (południk efemerydalny znajduje się na wschód od południka Greenwich).

Przez analogię do czasu słonecznego średniego w kontekście czasów *dynamicznych* mówi się niekiedy także o *dynamicznym Słońcu średnim*, którego określeniem może być matematyczne wyrażenie na dynamiczny czas gwiazdowy minus 12^h . Wtedy na definiję ziemskiego czasu dynamicznego zaakceptowalibyśmy: *zwiększony o 12^h kąt godzinny dynamicznego Słońca średniego względem południka efemerydalnego*. Podobnie, dla dynamicznego czasu gwiazdowego słuszne pozostaje stwierdzenie, że jest to *kąt godzinny punktu Barana liczony względem południka efemerydalnego*.

Gwiazdowa data Greenwich, GSD (od ang. Greenwich Sidereal Date) jest to interwał czasu gwiazdowego, wyrażony w dobach, który upłynął na południku Greenwich od początku doby gwiazdowej, która trwała w chwili JD0,0. W przybliżeniu można ją obliczyć ze wzoru (Enslin 1981, *Explanatory Supplement AENA* 1961):

$$GSD \approx 0,671 + 1,0027379093 \cdot JD.$$

Zachodzi też odwrotna relacja: $JD \approx -0,669 + 0,9972695664 \cdot GSD$. W praktyce obliczymy najpierw czas gwiazdowy, który wyrażony w dobach stanowi część ułamkową (po przecinku) GSD , zaś numer dnia (część całkowitą) otrzymamy ze wzoru przybliżonego. Np., 1 stycznia 1990 r. o godz. 0 UT (JD2447892,5) $GSD \approx 24545995,27$, $GMST = 6^h 41^m 32,068^s = 0,27884338^d$, a więc $GSD = 2454595,27884338$.

3.4 Lata Bessela oraz epoki juliańskie i standardowe

W pewnych zastosowaniach używa się zliczania czasu za pomocą słonecznych *lat Bessela*. Rok Bessela definiuje pełny obieg średniego Słońca wzdłuż równika (w rektascensji): $365,24219879^d - 0,00000786^d T'$, gdzie składnik stały jest długością roku zwrotnikowego w roku 1900 (epoka J1900) obliczoną zgodnie z teorią Newcomba ruchu orbitalnego Ziemi, zaś T' — czasem liczonym w stuleciach juliańskich od J1900. W praktyce lata Bessela (BY) mierzy się newcombowskimi latami zwrotnikowymi z epoki B1900 (o stałej długości $365,242198781^d = 31556925,9747^s$), a kolejny rok zaczyna się, gdy $\alpha_{\odot} = 18^h 40^m = 280^\circ$. Przypada to na dzień juliański

$$JD = 2415020,31352 + 365,242198781 \cdot (BY - 1900,0)$$

przy tym ułamek $0,31352^d = 365,25 \cdot 74,164/86402$ jest czasem potrzebnym na to, by średnie Słońce przesunęło się w rektascensji z pozycji zajmowanej w chwili J1900 ($18^h 38^m 45,836^s$) na $18^h 40^m$ (np. Newcomb 1960, Roth 1975). Np., początek besselowskiego roku 1950 przypada na JD2433282,42345905, tj. 1949.12.31,9235^d (występujące tutaj 0,9235^d jest równoważne $22^h 10^m UT$). Wzór na obliczenie roku (epoki) Bessela z daty juliańskiej ma postać

$$BY = 1900,0 + \frac{JD - 2415020,31352}{365,242198781}.$$

Dla odróżnienia od zwykłych lat początek lat Bessela zaznaczało się dotąd dodatkiem .0 (np. 1950.0 dla początku roku słonecznego w 1950 roku kalendarzowym). Obecnie, zgodnie z zaleceniem IAU, lata Bessela należy opatrywać przedrostkiem B (np. B1950 zamiast poprzedniego 1950.0) co odróżnia je od *epok juliańskich* oznaczanych przedrostkiem J (jak np. J2000).

Początkiem skali epok juliańskich (JY) jest $12^h UT$ 1 stycznia 2000 r. kalendarza gregoriańskiego. Moment ten jest juliańską *epoką standardową* oznaczaną konwencjonalnie przez $J2000$ i odpowiada jej $JD2451545,0$. Jeszcze do niedawna epoką standardową była chwila $12^h UT$ 31 grudnia 1899 r. (data ta jest na ogół zapisywana jako 0 stycznia 1900 r. i odpowiada jej $JD2415020,0$) — tak, że w praktyce możemy spotkać się z dwoma różnymi epokami standardowymi odległymi o pełny wiek juliański (36525 dni). Ponieważ rok juliański liczy 365,25 dni, a początek roku jest odległy od epoki standardowej o wielokrotność tej liczby, to dla początków lat juliańskich mamy:

$$JD = 2451545 + 365,25 \cdot (JY - 2000,0).$$

Np., początek roku 1981, jako epoka juliańska oznaczana przez $J1981,0$, odpowiada dacie juliańskiej $JD2444605,25$ co przypada na 0 stycznia 1981 r. (31 grudnia 1980 r.) o $18^h UT$.

Przeliczenie w odwrotną stronę — juliańskich dat na epoki — opisuje wyrażenie:

$$JY = 2000,0 + \frac{JD - 2451545,0}{365,25}$$

(zapis wartości numerycznej wyniku poprzedzimy literą J).

3.5 Kalendarze

Historycznie pierwsze prymitywne kalendarze zdają się być wynikiem zaobserwowania związku możliwości przeżycia i zmian w otoczeniu ujawniających się w widomych ruchach takich obiektów niebieskich jak Słońce, Księżyc i gwiazdy. W istocie kalendarze księżycowe zdają się być najstarszymi. W 1908 r. odkryto wapienną tabliczkę, znaną dziś jako kalendarz Gezer, zapisaną w starożytnym języku hebrajskim i datowaną na ok. 950 r.p.n.e. Wynika z niej, że działalność rolnicza była wówczas kojarzona z kolejnymi miesiącami.

Także najstarszy kalendarz egipski był księżycowym. Miał on 12-miesięczne lata z 29- i 30-dniowymi miesiącami na przemian. Jednakże, najpóźniej do piątego tysiąclecia przed Chrystusem zastąpiono go liczeniem do 12 miesięcy 30-dniowych. Każda doba była dzielona na 24 „godziny” — 12 dziennych i 12 nocnych, zatem o różnych długościach z dnia na dzień. Znacznie później, dopiero w pracach astronomów helleńskich, spotykamy podział doby na 24 równe odcinki. Podział godziny na 60 minut i minuty na 60 sekund pochodzi od Babilończyków.

3.5.1 Kalendarze słoneczne

Pierwsze kalendarze słoneczne pojawiły się u Egipcjan i Majów. Ich podstawą jest długość roku zwrotnikowego, około 365,2422 dni (ściślejse wyrażenie podajemy w postaci wzoru (6.35)), tj. okres powtarzania się pór roku. By zbadać zgodność danego kalendarza z porami roku zwykle sumuje się długość roku zwrotnikowego na wybranym odcinku czasu i porównuje z ilością lat i dni kalendarzowych, które upłynęły w tym samym czasie. Taka procedura jest metodycznie niepoprawna chociaż na niewielkich przedziałach czasu daje zadowalające rezultaty. Zauważmy, że ilość lat zwrotnikowych, jakie upłynęły w czasie T (w wiekach juliańskich od $J2000$), jest równa średniej długości ekliptycznej Słońca (równanie (6.34)) podzielonej przez $360^\circ = 1\,296\,000''$:

$$L_\tau = 100,0021383976 \cdot T + 8,43550 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 + 5,88 \cdot 10^{-11} \cdot T^3. \quad (3.4)$$

Po q kalendarzowych latach kalendarze astronomicznie ścisły i przyjęty cywilny rozbiegają się o $L_\tau(q) - q$ lat, co możemy pomnożyć przez ilość dni w roku kalendarzowym aby otrzymać różnicę w dniach. W ogólności można pokazać (Borkowski 1991), że dla kalendarza słonecznego zliczającego lata q naszej ery (liczone od epoki J0000) ilość lat przestępnych (po 366 dni) od roku 0 do q powinna wynosić:

$$l = ((-2,15 \cdot 10^{-14}q - 3,07 \cdot 10^{-8})q + 0,242313)q. \quad (3.5)$$

W rzeczywistości od tego wzoru należy odjąć jeszcze ΔT , tj. różnicę pomiędzy czasem efemeryd i czasem uniwersalnym wyrażoną w dobach, aby uwzględnić nierówną długość doby kalendarzowej. Różnica ta na długich okresach czasu jest jednak bardzo niedokładnie znana, a na krótkich jest zaniedbywalna. Pamiętając o tym można wykorzystać tutaj wzór (7.5).

Kalendarz juliański (stary styl)

Stary styl obowiązywał powszechnie od czasów Juliusza Cezara [ściślej: od -44 r. albo 45 r.p.n.e. — wtedy 709 r. AUC (Ab Urbe Coditā, tj. od założenia Miasta)] do 4 października 1582 r., a w niektórych krajach jeszcze w XX w. Rok poprzedzający wprowadzenie (-45) wydłużono do 445 dni — później zwano go z tego powodu „rokiem zamieszania”. Cezar zmienił wtedy również nazwę piątego miesiąca z Quintilis na Julius (nasz lipiec) i bardziej równomiernie rozdzielił dni roku pomiędzy poszczególne miesiące, z wyjątkiem lutego, który miał 29 dni. W 8 r.p.n.e. następny cesarz (August) zabrał lutemu jeszcze jeden dzień aby dodać go do sierpnia, który jednocześnie przybrał nową nazwę Augustus (podobno nie wypadło, by miesiąc o imieniu panującego był krótszy od miesiąca poprzednika, Juliusza!). Niestety reguły nowego kalendarza nie były ściśle przestrzegane aż do 8 r.n.e., kiedy wprowadzono odpowiednie korekty i odtąd rachuba biegła już bez zakłóceń aż do reformy papieża Grzegorza XIII w 1582 r.

Zwykle lata kalendarza juliańskiego mają po 365 dni a przestępne, co czwarty rok (którego liczba jest podzielna przez 4), po 366 dni. Średnia długość roku w tym kalendarzu wynosi zatem 365,25 dni. 1 stycznia 1990 r. tego kalendarza przypada na 14 stycznia 1990 r. w kalendarzu gregoriańskim.

Kalendarz gregoriański (nowy styl)

Wprowadzono go m.in. w Polsce w piątek 15 października 1582 r. (JD2299160,5; poprzedni dzień, czwartek, miał datę 4 października 1582 r. w dotąd obowiązującym kalendarzu juliańskim). Głównym czynnikiem, który zmusił Kościół (prowadzony wówczas przez papieża Grzegorza XIII) do reformy kalendarza był problem daty Wielkanocy, która tradycyjnie przypadała w okolicy pierwszej wiosennej pełni Księżyca (zgodnie z *Nowym Testamentem* ukrzyżowanie Jezusa z Nazaretu odbyło się w piątek 14 lub 15 dnia żydowskiego miesiąca Nisan, a więc 14–15 dni po nowiu). Nowy kalendarz opracowała specjalna komisja papieska, która oparła się na propozycji lekarza i wykładowcy uniwersytetu Perugii, A. Liliusa (konsultowany był w tej sprawie także M. Kopernik).

Reguły kalendarza gregoriańskiego są następujące:

- lata zwykle mają po 365, a przestępne — 366 dni z dodatkowym dniem wstawianym po 28 lutym jako 29 luty
- rok, którego liczba jest podzielna przez 4 jest przestępnym, ale
- rok, którego liczba jest podzielna przez 100 jest zwykłym, ale
- rok, którego liczba jest podzielna przez 400 jest przestępnym

W 400 latach jest więc $100 - 4 + 1 = 97$ dni przestępnych zwiększających średnią długość roku z 365 do $365 \frac{97}{400} = 365,2425$ dni.

Przyjmując, że w roku 2000 omawiany kalendarz jest zgodny z astronomicznym, po T juliańskich wiekach rozbieżność wyniesie (dni):

$$N = ((2,147 \cdot 10^{-8}T + 3,081 \cdot 10^{-4})T + 0,03103369)T \quad (3.6)$$

plus $\Delta T/86400^s$ (Borkowski 1991). Np., dla roku 4000 ($T = 20$) ze wzoru tego dostajemy $N = 0,74^d$, które po uwzględnieniu ΔT rośnie do $0,8 - 1,1^d$. Interpretuje się tę rozbieżność jako ilość dni o jakie data równonocy wiosennej cofnie się w kalendarzu gregoriańskim. W tym przykładzie data ta przesunie się z 20 marca w 2000 r. na 19 marca w 4000 r. Wobec pojawiających się sugestii reformy kalendarza gregoriańskiego (np. Peck 1990) dodać trzeba, że podobne obliczenia dla dalszych tysiącleci w przyszłość wykazują, iż ze względu na nieregularność rotacji Ziemi nie potrafimy dziś przewidzieć wartości N zadowalająco dokładnie. Już dla 10 000 lat niepewność wyznaczenia N obejmuje około 4 dni!

Kalendarz nowojuliański

Tzw. *nowy kalendarz wschodni* albo nowojuliański był w marginalnym użyciu we wschodnim obszarze śródziemnomorskim, w kościele prawosławnym. Reguły tego kalendarza, opracowane przez wybitnego jugosłowiańskiego astronoma M. Milankovića, są podobne do gregoriańskiego z wyjątkiem ostatniej, która rokiem przestępnym czyni ten, którego liczba po podzieleniu przez 900 daje resztę 200 lub 600. Efektem tego średnia długość roku wynosi $365 \frac{218}{900} = 365,242222$ dni, a zatem jest wyjątkowo bliska rokowi zwrotnikowemu. Nie ma to jednak żadnego praktycznego znaczenia wobec niepewności (w skali tysiącleci) długości roku zwrotnikowego (kalendarz gregoriański w tym kontekście jest więcej niż zadowalająco dobry).

3.5.2 Kalendarze księżycowe

Podstawą zliczania czasu jest tutaj miesiąc synodyczny, który ma długość ok. 29,5 dni. Stąd miesiące kalendarzy księżycowych liczą na ogół na przemian po 29 i 30 dni. Początkiem miesiąca jest dzień pojawienia się nowego sierpa na zachodzie. W starożytności takim kalendarzem posługiwali się Babilończycy i Chińczycy.

Kalendarz chiński

Jego powstanie datuje się na rok 2397 p.n.e. Lata (12-miesięczne) zlicza się w cyklach po 60. Każdy rok w cyklu ma szczególną nazwę. Do 60 prowadzi się także rachubę miesięcy odnawiając ją po 5 latach. Miesiące mają od 28 do 30 dni. 2 lutego 1984 r.n.e. rozpoczął się 4621 rok ery chińskiej.

Kalendarz rzymski

Jeden z najbardziej chaotycznych kalendarzy prowadzili Rzymianie. Początkowo rok liczył tam 10 miesięcy, później 12 z wyjątkowo zniekształcanym lutym. Wielokrotnie też zmieniano nazwy i długości poszczególnych miesięcy gubiąc niekiedy rachubę (Zajdler 1977). Dzień nowiu Księżycy (pierwszy dzień miesiąca) zwano kalendami (*Kalendae*) i stąd pochodzi dzisiejszy termin „kalendarz”. Od Rzymian pochodzą także współczesne nazwy miesięcy w wielu językach. Np., dla grudnia, ongiś 10-go (ostatniego) miesiąca roku, spotykamy miana wyrażające jego numer: *december*, *decembro*, *décembre*, *dicembre*, *diciembre*, *Dezember*, *dekabr*!. Według rachuby od założenia Rzymu, w 1990 r.n.e. przypada rok 2743 AUC.

Kalendarz muzułmański

W kalendarzu mahometańskim (muzułmańskim) za początek rachuby lat przyjęto 16 lipca 622 r. (JD1948440) — datę związaną (choć nie ściśle) ze słynną ucieczką (hidżra albo hegira) Mahometa z Mekki do Medyny. Lata liczy się w cyklach po 30, z których 19 ma po 354 dni a 11 (przestępne) — po 355. W roku jest 12 miesięcy po 30 i 29 dni (w zasadzie na przemian, ale ostatni miesiąc — *dhul-hiddze* albo *dhu'l-hijja* — w latach przestępnych ma 30 dni). Średnia długość roku wynosi 354,37 dni. Dzień nowego roku w tym kalendarzu cofa się więc po datach kalendarza słonecznego przez wszystkie pory roku.

Przeliczanie dat kalendarza Muzułmanów na gregoriański jest stosunkowo kłopotliwe ze względu na występowanie lat przestępnych w obu kalendarzach w innej kolejności. Dodatkową trudnością jest fakt, że w kalendarzu tureckim lata przestępne wprowadza się według innych reguł niż w arabskim. Z tolerancją kilku dni lata gregoriańskie, G , wiąże z mahometańskimi, M , wzór:

$$G = 621,54 + 0,9702M \quad \text{albo} \quad M = 1,0306(G - 621,54).$$

1411 h. (rok od hegiry) rozpoczął się 24 lipca 1990 r. kalendarza gregoriańskiego.

3.5.3 Kalendarze księżycowo-słoneczne

Ponieważ 12 miesięcy księżycowych czyni 354 dni (tj. 11 dni mniej niż rok zwrotnikowy) to, ażeby uzyskać zgodność miesięcy roku z porami roku, mniej więcej co trzy lata wprowadza się miesiąc przestępny. W różnych kalendarzach tego typu są różne reguły wprowadzania miesiąca przestępnego. W Babilonie wprowadzano go co 3-ci rok. W Grecji stosowano tzw. cykl Metona obejmujący 19 lat, w których jest 12 zwykłych i 7 przestępnych (13-miesięcznych).

Kalendarz hinduski

Kalendarz ten we współczesnej formie został ukształtowany ok. 400 r.n.e. Dwanaście 29- do 32-dniowych miesięcy wprowadza się zgodnie z wstępowaniem Słońca w kolejne znaki zodiaku. W 1990 r.n.e. przypada 1912 r. ery hinduskiej (Saka).

Kalendarz hebrajski

Struktura kalendarza żydowskiego (hebrajskiego) wzorowana była na praktykach Babilończyków. Obecnie stosowany jest w życiu religijnym Żydów oraz, obok gregoriańskiego, w państwie Izrael. Żydzi liczą lata od stworzenia świata, który to moment według ich rachunków wystąpił 7 października 3761 r.p.n.e. (JD347998). Kalendarz hebrajski oparty jest na 19-letnim cyklu Metona, w którym lata 3, 6, 8, 11, 14, 17 i 19 są przestępnymi (13-miesięcznymi). Nowy rok przypada tutaj w okolicy równonocy jesiennej (między 5 września i 5 października). W 1990 r., 20 września, kalendarza gregoriańskiego, o zachodzie Słońca rozpoczął się 5751 rok ery judajskiej.

3.5.4 Kalendarz światowy

Obecnie powszechnie stosowany kalendarz gregoriański nie wymaga żadnych poprawek w aspekcie długości roku i reguł lat przestępnych. Zastrzeżenia budzą niejednakowe miesiące i kwartały oraz zmienny rozkład dni tygodnia. Powstało wiele projektów reformy tego kalendarza ale żaden nie zyskał jednolitego poparcia międzynarodowych gremiów.

Jeden z projektów, opracowany przez kalendarzową komisję Narodów Zjednoczonych, przewiduje aby nowy rok przypadał zawsze na niedzielę 1 stycznia i aby kwartały były takie same: pierwszy miesiąc 31-dniowy, pozostałe dwa po 30 dni. Święta przypadałyby corocznie na te same daty (a więc i te same dni tygodnia) — np. Boże Narodzenie obchodzono by 25 i 26 grudnia w poniedziałek i wtorek, Wielkanoc — 15 kwietnia. W sumie rok takiego kalendarza liczyłby 364 dni, a brakujące 1 – 2 dni dodawano by na końcu roku (corocznie) i po 30 czerwca (w latach przestępnych) jako dni bez daty (także poza rachubą tygodnia); byłyby to międzynarodowe dni świąteczne. Kalendarz tego typu można by wprowadzić w roku gregoriańskim zaczynającym się w niedzielę. Podstawową wadą kalendarza światowego jest przerwanie ciągłości rachuby dni tygodnia.

Jedna z wersji kalendarza światowego

I kwartał	Styczeń	Luty	Marzec
II kwartał	Kwiecień	Maj	Czerwiec*
III kwartał	Lipiec	Sierpień	Wrzesień
IV kwartał	Październik	Listopad	Grudzień*
Niedziela	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24 *
Poniedziałek	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25
Wtorek	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26
Sroda	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27
Czwartek	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28
Piątek	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29
Sobota	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30

* — zawsze po 30 XII jest jeden dzień bez daty („światowy”) oraz, dodatkowo, w latach przestępnych także po 30 VI

3.5.5 Kalendarz biorytmiczny

W tym punkcie przedstawiamy kalendarz, który nie pasuje do dotąd omówionych i, poza przeliczaniem dat kalendarzowych i nazwą, niewiele ma wspólnego z astronomią czy nawet rachubą czasu a ponadto odnosi się do indywidualnych osób. Niechaj Student potraktuje to przedstawienie jako ciekawostkę.

U podstaw tego kalendarza, albo tzw. biorytmów, leży teoria, w której mówi się, że w chwili narodzin, z pierwszym oddechem, rusza w człowieku wewnętrzny zegar biologiczny. W tym momencie zaczyna on odmierzać trzy regularne cykle: FIZYCZNY o okresie 23 dni, EMOCJONALNY (psychiczny) — 28 dni i INTELEKTUALNY — 33 dni, które według wyznawców tej, podobno naukowo sprawdzonej, teorii mają wyraźne odbicie w naszej codziennej działalności. Biorytmem jest wykres trzech, wzajemnie przeplatających się, sinusoidalnych przebiegów o wyżej wymienionych okresach. Pojedynczy przebieg o okresie P można zapisać w postaci funkcji dnia juliańskiego:

$$f = \sin\left(2\pi \frac{JD - JD_0}{P}\right) = \sin\left(360^\circ \frac{JD - JD_0}{P}\right),$$

gdzie JD_0 jest datą juliańską dnia urodzenia.

Miejsca zerowe ($f = 0$) każdego przebiegu nazywa się KRYTYCZNYMI, a dni sąsiadujące z nimi po obu stronach — PÓŁKRYTYCZNYMI; przebiegi ponad osią czasu ($f > 0$) kojarzy się z podwyższoną sprawnością (fizyczną, emocjonalną lub intelektualną), a te poniżej osi czasu — z niskim poziomem pobudzenia (niższa sprawność).

Przykładowo, osoba urodzona 20 IV 1982 r. ($JD_0 = 2445080$) w dniu 16 V 1989 r. ($JD = 2447663$) będzie miała następujące wartości funkcji f trzech cykli w biorytmie ($JD - JD_0 = 2583^d$):

$$\begin{aligned} 2583/23 &= 112,3043 & \sin(0,3043 \cdot 360^\circ) &= 0,94 \\ 2583/28 &= 92,2500 & \sin(0,2500 \cdot 360^\circ) &= 1,00 \\ 2583/33 &= 78,2727 & \sin(0,2727 \cdot 360^\circ) &= 0,99 \end{aligned}$$

co w tym wypadku oznacza prawie jednoczesne maksima sprawności we wszystkich cyklach. Ścisła koincydencja faz cykli może wystąpić tylko raz na $23 \cdot 28 \cdot 33 = 21252$ dni, albo ponad 58 lat. Nie musimy przekonywać Studenta by wybierał termin egzaminu pod kątem swej najlepszej sprawności biorytmicznej (wszak wnioszek taki nasuwa się samoistnie).

3.6 Dni juliańskie a daty kalendarzowe

Przeliczanie dat różnych kalendarzy na inne w ogólności nie jest rzeczą łatwą. Algorytmy zamiany dat zwykle opierają się na zestawieniach tabelarycznych lub formułach przeliczania dat kalendarzowych na dni juliańskie i odwrotnie. Opracowano w ten sposób szereg istniejących i historycznych kalendarzy (np. Gossler 1980, Hatcher 1984, 1985). Przytoczymy tutaj algorytmy dla kalendarza gregoriańskiego i juliańskiego (odpowiednie programy w języku FORTRAN podano u Borkowskiego, 1987b).

Oznaczmy przez L , M i N lata, miesiące i dni daty kalendarza gregoriańskiego lub juliańskiego. W celu obliczenia dnia juliańskiego na południe ($12^h UT$) wykonujemy następujące rachunki:

$$\begin{aligned}
L' &= L + 4716 - \text{int} \frac{14 - M}{12} \\
M' &= (M + 9) \bmod 12 \\
G &= 0, \quad \text{dla kalendarza juliańskiego} \\
&= \text{int} \left(\frac{3}{4} \text{int} \frac{L' + 184}{100} \right) - 38 \quad \text{dla gregoriańskiego} \\
\text{wtedy} \\
JD &= \text{int}(365,25 L') + \text{int}(30,6 M' + 0,4) + N - G - 1402,
\end{aligned}$$

gdzie $\text{int}(x)$ oznacza część całkowitą x .

Przy odtwarzaniu daty kalendarzowej z JD kładziemy najpierw 0 na G w przypadku kalendarza juliańskiego, a dla gregoriańskiego obliczamy w tym miejscu wyrażenie

$$G = \text{int} \left(\frac{3}{4} \text{int} \frac{JD + 68569}{36524,25} \right) - 38$$

i dalej (dla obu kalendarzy):

$$\begin{aligned}
J &= 4(JD + G + 1401) + 3 \\
I &= 2 + 5 \text{int} \frac{J \bmod 1461}{4} \\
N &= 1 + \text{int} \frac{I \bmod 153}{5} \\
M &= 1 + (2 + \text{int} \frac{I}{153}) \bmod 12 \quad \text{oraz} \\
L &= \text{int} \frac{J}{1461} - 4716 + \text{int} \frac{14 - M}{12}
\end{aligned}$$

Algorytmy te programuje się szczególnie efektywnie w FORTRANie wykorzystując arytmetykę liczb całkowitych. Na przykład, dla wszystkich lat naszej ery w kalendarzu gregoriańskim jest w tym języku:

$$\begin{aligned}
JD &= (L + (M - 8)/6) * 1461/4 + (153 * \text{MOD}(M + 9, 12) + 2)/5 + N + 1721117 \\
&\quad - (L + (M - 8)/6 + 100)/100 * 3/4 + 2,
\end{aligned}$$

gdzie kolejność działań jest ważna dla poprawności wyliczenia (nie można np. zamienić $*1461/4$ na $/4*1461$); opuszczając drugi wiersz w tym wyrażeniu otrzymujemy wzór dla kalendarza juliańskiego. W okresie od 1 marca 1900 r. do 28 lutego 2100 r. słuszne jest prostsze wyrażenie (dla kalendarza gregoriańskiego):

$$\boxed{JD = 367 * L - 7 * (L + (M + 9)/12)/4 + 275 * M/9 + N + 1721014} \quad (3.7)$$

W tym samym okresie daty kalendarza juliańskiego są opóźnione względem gregoriańskich o 13 dni. Aby otrzymać formułę odpowiednią do kalendarza juliańskiego wystarczy zatem we wzorze (3.7) liczbę 1721014 zamienić na 1721027.

3.7 Rotacje Carringtona

Rachuba rotacji Carringtona stosowana jest w obserwacjach Słońca. Ponad 100 lat temu R.C. Carrington wyznaczył średni *synodyczny* (tj. liczony względem kierunku Ziemia-Słońce) okres obrotu plam słonecznych na 27,2753 dni (okres mierzony względem gwiazd, tj. okres *syderyczny*, wynosi 25,38 dni). Ilość obrotów liczona jest od 9 listopada 1853 r. Np., obrót nr 1758 rozpoczął się 24,62 stycznia 1985 r. Rachuba ta określa efektywnie siatkę długości heliograficznych; każdy z obrotów zaczyna się, gdy długość 0° pokrywa się z południkiem centralnym (długość na Słońcu liczy się od 0 do 360° ze wschodu na zachód). Numer rotacji można obliczyć ze wzoru:

$$NRC = 1690 + \frac{JD - 2444235,34}{27,2753}.$$

Np., 19 stycznia 1990 r. o godz. 0 UT (JD2447910,5) $NRC = 1824,74$, co znaczy że trwa już rotacja nr 1825.

3.8 Czas a światopogląd

W naukach zwanych ścisłymi czasowi przypisuje się na ogół własności wymiaru. Stąd możemy mówić o jednostkach i mierzeniu czasu oraz o efektach typu kontrakcji (dylatacji) czasu stowarzyszonego z obiektami poruszającymi się. Są też postulaty o równoważności czasu i przestrzeni w takim sensie, jak masa jest równoważna energii (1 sekundzie czasu odpowiadałaby przestrzeń, jaką przebywa światło w tej jednostce). Podobnie jednak jak przestrzeń, czas należy do pojęć podstawowych, pierwotnych, których z tej przyczyny nie 'rozdrabnia' się. Czy jednak nie można powiedzieć czegoś więcej o naturze czasu? Otóż można, lecz trzeba w tym celu wkroczyć do dziedziny mędrców i filozofów. Współczesna filozofia, oparta na logice matematycznej czy teorii zbiorów, ma dużo do powiedzenia na temat czasu lecz wyraźnie boryka się z podstawowymi trudnościami (np. Augustynek 1979) i często więcej zdaje się być tutaj spekulacją lub wręcz pustosłowia niż prawdziwej wiedzy. Być może jednak np. w filozofii *wedyjskiej* więcej jest ziaren głębokiej prawdy niżli pobieżny osąd podpowiada. Posłuchajmy wszakże co o czasie mówią niektóre materiały źródłowe (większe fragmenty tekstu drukowanego tutaj kursywą oznaczają cytaty).

Najwyższym bogom wielkich religii przypisuje się niekiedy atrybut czasu. Kryszna, na przykład, przyrównuje siebie wprost do czasu mówiąc do Arjuna: (...) *Ja jestem również niewyczerpanym czasem, a pomiędzy stwórcami — Brahmą* [Bhagawad-Gītā 10.33 (Praphupada 1986)]. Podobnie możemy rozumieć również słowa biblijnego Boga Chrześcijan: *Ja jestem alfa i omega, pierwszy i ostatni, początek i koniec* [Izaj. 44, 6; 48, 12; Obj. 1, 17] i, być może, to co napisano o Allahu w Koranie: *On jest Pierwszym i Ostatnim* [sura LVII, 3 (Koran 1986)]. Średniowieczny mistyk chrześcijański, Mistrz Eckhart, twierdzi zaś: (...) *nieba nie dotyka ani czas, ani przestrzeń. Nie ma w nim miejsca dla żadnej rzeczy cielesnej. Nie pozostaje ono również w obrębie czasu, jego obieg jest niewiarygodnie szybki; jego obieg jest niezależny od czasu, z biegu tego wszakże pochodzi czas. Nic tak bardzo nie przeszkadza duszy w poznaniu Boga jak czas i przestrzeń. Czas i przestrzeń to części, natomiast Bóg stanowi Jedno* (Eckhart 1988, s. 241).

Wedyjska rachuba czasu

W hinduizmie przyjmuje się, że czas trwania materialnego wszechświata jest ograniczony. Manifestuje się on w cyklu *kalp*. Kalpa, zwana też dniem Brahmę (najwyższego z przemijających bogów), składa się z blisko (niektóre źródła mówią, że dokładnie z) 1000 cykli czterech *jug* (yug) czyli epok: Krita albo Satya (trwająca 1 728 000 ziemskich lat), Treta (1 296 000 lat), Dwapara (864 000 lat) i Kali (432 000 lat) — razem 4 320 000 lat albo okres nazywany Wielkim Cyklem bądź *maha-jugą*. Obecnie, od dnia omyłkowego zabicia Kryszny, tj. od 17 lutego 3102 r. p.n.e. (JD588465), trwa Kali-juga (Wiek Żelazny), który charakteryzuje się obfitością konfliktów, ignorancją, niereligijnością i przestępczością. Gdy upłynie 71 mahajug (tzw. *manwantara*), wtedy następuje ogólny potop — masy wód pokrywają całą Ziemię na okres następnych 71 mahajug.

Po dniu Brahmę (około albo ściśle 14 manwantar) następuje tak samo długa noc Brahmę. Razem więc doba Brahmę wynosi 2 razy po tysiąc mahajug, albo około 8,6 miliardów lat. Zauważmy, że współcześni astronomowie oceniają wiek Ziemi na 5 miliardów lat zaś wszechświatowi przypisuje się 10 – 20 miliardów lat licząc od tzw. wielkiego wybuchu (ang. *Big Bang*). Istnieją też hipotezy pulsującego wszechświata co może nam nasuwać skojarzenie nie tyle z następstwem dób Brahmę ile z największym, jeszcze nie wspomnianym tutaj, cyklem *Maya-Prayleya* liczącym 36 000 kalp (czas życia Brahmę: sto niebiańskich lat po 360 dni Brahmę). Po takim czasie Absolut wchłania w siebie całość swych przejawień i pozostaje sam w pełnej Jedności i Nieskończoności przez kolejne 36 000 kalp. Potem znów rodzi się Brahma i powstaje świat przejawiony trwający 36 000 kalp i tyle samo czasu go niema. Sugeruje nam to na ewentualną okresowość pulsującego wszechświata iście astronomiczną liczbę ponad 622 trylionów (2 razy po $3,1104 \cdot 10^{14}$) ziemskich lat. Niestety, obecnie nie da się zweryfikować tej liczby ani nawet samego istnienia pulsacji wszechświata.

Wszechświat jest nie kończącym się następstwem zdarzeń, ale jego podstawą według filozofii wieczystej, jest wieczne teraz boskie Ducha (...) Przyjmuje się, że wieczne 'teraz' jest świadomością a boska Podstawa jest duchem. *Idea czasowego świata poznawczego, i jednocześnie podtrzymywanego oraz nieustannie stwarzanego przez wieczną świadomość, nie zawiera żadnej wewnętrznej sprzeczności.*

Poczynając od Hobbesa, przeciwnicy filozofii wieczystej negowali istnienie wiecznego teraz. Według tych myślicieli czas i zmiana są czymś podstawowym; nie ma żadnej innej rzeczywistości. Co więcej, przyszłe wydarzenia są całkowicie niezdeterminowane i nawet Bóg nie może posiadać wiedzy na ich temat (...) Jednak wyrytkowe świadectwa zebrane przez Society for Psychical Research oraz statystycznie znaczące świadectwa laboratoryjne testów postrzegania pozazmysłowego prowadzą nieuchronnie do wniosku, że nawet ludzkie umysły zdolne są do przedwiedzy. *A jeśli skończona świadomość może wiedzieć jaka karta zostanie odwrócona za trzy sekundy lub jaka katastrofa morska wydarzy się w przyszłym tygodniu, to nie ma nic niemożliwego czy nawet wewnętrznie nieprawdopodobnego w idei nieskończonej świadomości, która może w chwili obecnej znać wydarzenia dowolnie oddalone w tym, co dla nas jest czasem przyszłym. 'Zwodnicza terażniejszość' w jakiej żyją istoty ludzkie, może być — a być może jest zawsze — czymś więcej niż krótkim odcinkiem przejścia od znanej przeszłości do nieznanego przyszłości, nazywanym przez nas z powodu*

nieostrości naszej pamięci chwilą 'teraz'. Może ona zawierać, a być może zawiera, porcje najbliższej, a nawet stosunkowo dalekiej przyszłości (Huxley 1989).

Filozofia stanowiąca podstawę buddyzmu tym różni się od indyjskich i nieindyjskich systemów, że podkreśla bardzo silnie nieustanną zmienność wszystkiego, co istnieje. Niezmienne są tu jedynie odwieczne prawa świata, pusta przestrzeń i nirwana.

Mijanie dnia i nocy przypomina nam o upływie czasu. Przemijanie widzimy w każdym momencie terażniejszości, który kiedyś był chwilą przyszłą, a wkrótce będzie częścią przeszłości. Każdy moment szybko przemija i nigdy już nie powraca.

Czas przemija ciągle, więc samo przemijanie może wydać się czymś stałym. Aby skorygować takie postrzeganie, spójrzmy na wodospad. Sprawia on wrażenie ciągłego strumienia wody, lecz w rzeczywistości jest milionami drobniutkich pojedynczych spadających kropelek. Czas może także sprawiać wrażenie ciągłego strumienia, lecz w rzeczywistości jest milionami drobniutkich pojedynczych wydarzeń, z których każde zdarza się i kończy. Każde wydarzenie, każdy moment jest życiem i śmiercią, i nigdy nie zatrzyma się i nie zawróci (Lodö 1990).

W filozofii buddyjskiej jednym ze sposobów wykazania, że wewnętrznego umysłu jako czegoś trwałego, istniejącego realnie w istocie nie ma, jest 'ukazanie jego chwilowej bodaj nietrwałości'. Polega to na *postawieniu pytania czy umysł istnieje przez jeden bodaj moment czy najmniejszą jednostkę czasu? Jeśli dowiedziono, że umysł rzeczywiście istnieje przez najmniejszą chwilę czasu, wówczas musimy przeanalizować ową najmniejszą jednostkę, by sprawdzić czy potrafimy znaleźć w niej obecność trzech czasów.*

Jeśli najmniejszą jednostkę czasu można dalej podzielić, wówczas nie można odkryć tej najkrótszej chwili istnienia umysłu. Jeśli dowiedziono, że umysł istnieje dłużej niż okres czasu tj. ponad pewną liczbę chwil, tym samym teza o jego istnieniu zostaje obalona. Jeśli nie istnieje on w obrębie każdej z takich pojedynczych chwil więc jak może istnieć przez jakiś dłuższy od nich okres? Tak więc teza o istnieniu umysłu zostaje obalona.

Umysł jako taki nie istnieje w przeszłości ponieważ przeszłość jest zakończona, nie istnieje w przyszłości ponieważ ta jeszcze się nie pojawiła, i nie istnieje w terażniejszości ponieważ nie sposób go znaleźć. Nie ma on nic wspólnego z kształtem, rozmiarem czy barwą, mówi się, że jest jak niebo, jak pusta przestrzeń (Lodö 1990).

Podobny ton przebija w słowach naszego Ks. Klimuszki (1978): *Ujmując poglądowo czas terażniejszy, jest to odcinek trwania czy ruchu, zależnie jak kto pojmuje, między nieskończoną przeszłością a nieskończoną przyszłością. Jaka więc jest długość tego odcinka. Jest on absolutną małością, jeśli nie całkowitą nicością. (...) Nasuwa się uzasadniona wątpliwość, azali w ogóle czas terażniejszy istnieje.*

Warto dodać, że buddyści równie wymyślnie dowodzą nieistnienia postrzeganej przez nas rzeczywistości zauważając m.in., że jest podobnie nierealna jak rzeczywistość doznawana w marzeniach sennych. Tak samo stanowczo podważa się prawdziwość twierdzenia o nie-istnieniu (umysłu i otaczającej rzeczywistości) wnioskując, że prawda leży poza rozróżnieniem czy dychotomią między istnieniem a nie-istnieniem.

Zauważmy, że cytowana argumentacja buddystów bardzo przypomina logikę *eleackiej* szkoły filozoficznej. Jeden z jej przedstawicieli, Parmenides, twierdził np., że strzała lecąca w powietrzu nie może się poruszać. W dowolnej chwili zajmuje ona swoją przestrzeń, a ponieważ przestrzeń jest stacjonarna, zatem musi ona spoczywać z momentu na moment. Kiedyż ma się ona poruszyć? Tak więc zmiana jaką widzimy musi być iluzją.

W tradycji Indian Ameryki Północnej wszechświat jest przestrzenią wypełnioną energią. Zmiana następuje wtedy, gdy energia przemieszcza się. W naszej kulturze ową

Zmianę nazywamy „czasem” — przeszłością, teraźniejszością i przyszłością. Lecz w istocie nie jest to w ogóle czas. Jest to Zmiana — była, jest, będzie (Underwood Spencer 1990).

W jednej z rozmów pewien tzw. oświecony mędrzec hinduski tak się wypowiada o czasie (Nisargadatta 1978): [Absolut – Doskonała Wszechświadość] *w ogóle nie zależy od czasu. Pojęcie czasu istnieje wyłącznie w ludzkiej świadomości. Gdzież poza nią może być czas i przestrzeń?* Na pytanie, czy on rzeczywiście uważa, że istnieje wszędzie i we wszystkich czasach odpowiada zaś: *Tak. Jest to dla mnie tak oczywiste, jak dla pana jest oczywista swoboda poruszania się. Niech pan wyobrazi sobie drzewo pytające małpę: „Czy naprawdę sądzisz, że możesz poruszać się z miejsca na miejsce?” A małpa odpowiada: „Tak właśnie sądzę”.* Jednakże i w naszej kulturze coraz częściej spotykamy wypowiedzi kłócące się z tzw. naukowym światopoglądem, a nawet zdrowym rozsądkiem. Nie są to bynajmniej opinie odosobnione. Norweski lekarz zajmujący się badaniami zjawisk z pogranicza życie–śmierć (Amundsen 1990) mówi tak: *W głębi nas samych czas i przestrzeń nie istnieją (...) [W stanach na pograniczu śmierci] przestaje istnieć czas i przestrzeń. Mimo, że może się to wydać niewiarygodne, możliwe jest patrzenie w przód i tył czasu. Wielu jasnowidzów nie potrzebuje aż tak drastycznych sytuacji. Np., Klimuszko (1978) zwierza się: *Wiem tylko, jeśli chodzi o mnie, że widzę ją [przyszłość] i odczuwam, ale dlaczego, jaką drogą do tego dochodzę — nie wiem.**

Wykładowca jogi królewskiej (radżajogi), znany chirurg R. Mishra, mówi także, iż *(...) wszystkie rzeczy materialne są jedynie ekspresją umysłu. Fał mentalnych, siły mentalnej nie wiążą przyczyny, skutki, czas i przestrzeń. Fał twego umysłu mogą docierać do gwiazd oddalonych o miliony kilometrów. W jednej chwili możesz przekazać twe myśli osobie, która znajduje się daleko od ciebie. Możesz poznawać zdarzenia minione i przyszłe w podobny sposób, jak na rozłożonej mapie przemierzasz różne kraje. Możesz osiągnąć te niezwykle zdolności dzięki praktyce jogi (Mishra 1963).*

Ani filozofowie, ani nauki ścisłe nie mówią wprost o kierunku przepływu czasu. Oto co myśli na ten temat Silva (1985, też Silva i Mele 1990), twórca metody kontroli umysłu polegającej na wprowadzaniu umysłu w stan odpowiadający mózgowym falom alfa i teta:

W alfa i teta patrzymy tak samo w przyszłość, jak w przeszłość. Przyszłe zdarzenia rzucają cienie zanim nastąpią i możemy wyćwiczyć się w widzeniu ich. (...) Aby w alfa czy teta przyszłość mogła być widziana tu i teraz musi zostać wysłany pewien rodzaj energii, do którego musimy się dostroić (...)

Kiedyś, kiedy eksperymentowałem z hipnozą, odkryłem coś dziwnego, w związku z tym, jak odczuwany jest czas. Kiedy dwoje moich dzieci poddawałem regresji — cofaniu się w czasie — jeśli przesunięcie to odbywało się gwałtownie, rzuczne były one w prawo (...) Potem zacząłem zastanawiać się, czy łatwiej byłoby mi poruszać się w czasie [podczas aktywnej medytacji], gdybym — zgodnie z wnioskami doświadczeń nad hipnozą — umieścił przyszłość po lewej, a przeszłość po prawej stronie (...)

Nie wiem, czy naprawdę odkryłem kierunek upływu czasu na tej ziemi [ze wschodu na zachód (i od lewej ku prawej)]. Wiem jednak, że kiedy usiadłem w medytacji zwrócony twarzą na południe czułem się lepiej zorientowany w czasie i łatwiej mogłem się w nim poruszać.

Jeśli Student doczytał do tego miejsca, to być może nie będą już dlań brzmieć tak sensacyjnie doniesienia takie, jak w źródle cytowanego wyżej Amundsena. Mówi się tam o doświadczeniach pilotów, którym zdarza się przekraczać coś co można nazwać ‘barierą czasu’. Pilot wraz ze swoją maszyną niespodziewanie (i na krótko) znajdowali się w

żywych sytuacjach sprzed dziesiątków a nawet tysięcy lat, dostrzegając niekiedy reakcję tego niezwyklego otoczenia na zjawę rodem z XX w.!

Wracając do naukowego światopoglądu trzeba stwierdzić, że świat współczesnej, kartezjuszowskiej, nauki istotnie jest mocno sprzeczny z intuicją. To co nauka mówi o otaczającej rzeczywistości i to jak ją postrzegamy znajdują się w dwóch całkiem niezależnych obozach. W kontekście naukowych kategorii ‘przestrzeni’, ‘czasu’, ‘masy’ i ‘energii’ człowiek jest ledwie chwilowym, przypadkowym produktem ślepej i bezcelowej natury. Jego ideały, nadzieje i aspiracje są jego własnymi wytworami i nie ma dla nich miejsca w naturze. Matka Ziemia jest tylko punkcikiem gdzieś na obrzeżach niezbyt znaczącej galaktyki. I nawet miejsce człowieka na niej jest niedawne, tymczasowe, niepewne (Dixey 1990). Wydaje się jednak, że liniowy obraz świata rysowany przez współczesną naukę zaczyna być infiltrowany przez, uznawane przez wielu za wsteczne, poglądy ezoteryczne, holistyczne czerpiące obficie z kultur Wschodu. Przyczyniają się do tego zarówno najnowsze odkrycia fizyki jak i niedawne otwarcie się na Zachód szkół Chin, Tybetu i Indii. Nie jest więc wykluczone, że żyjemy w ciekawych czasach gruntownej zmiany paradygmatu nauki (np. Capra 1987).

3.9 Przykłady

Przykład 3.1

Na południku $\lambda = 0^h 55^m E$ zaobserwowano moment górowania Słońca o $12^h 12^m CET$ (czasu środkowoeuropejskiego). Obliczyć równanie czasu, czas gwiazdowy o godz. 0 UT w Greenwich i moment górowania punktu Barana w tym samym dniu wiedząc, że w chwili pomiaru $\alpha_{\odot} = 12^h 09^m$. Rachunek wykonać z dokładnością do 1 minuty czasu.

--- ◇◇◇ ---

$$\begin{aligned}
 UT &= CET - 1^h = 11^h 12^m && \text{--- czas uniwersalny obserwacji} \\
 T_{\odot} &= UT + \lambda = 12^h 07^m && \text{--- lokalny czas słoneczny średni} \\
 \Delta\alpha &= T_{\odot} - T_{\odot} = 12^h 00^m - 12^h 07^m = -7^m && \text{--- równanie czasu} \\
 T_{\star} &= \alpha_{\odot} + t_{\odot} = 12^h 09^m && \text{--- lokalny czas gwiazdowy} \\
 GAST &= T_{\star} - \lambda = 12^h 09^m - 55^m = 11^h 14^m && \text{--- czas gwiazdowy w Greenwich} \\
 GAST0 &= GAST - UT \cdot 1,00274 = 0^h 0^m && \text{--- czas gwiazdowy w Greenwich o } 0^h UT \\
 T_{\star\Upsilon} &= 0^h && \text{--- lokalny czas gwiazdowy górowania punktu Barana } (\Upsilon) \\
 T_{\odot\Upsilon} &= T_{\odot} - (T_{\star} - T_{\star\Upsilon})/1,00274 = 0^h 05^m && \text{--- lokalny czas słoneczny górowania } \Upsilon \\
 CET_{\Upsilon} &= T_{\odot\Upsilon} - \lambda + 1^h = 0^h 05^m + 5^m = 0^h 10^m && \text{--- czas strefowy górowania } \Upsilon
 \end{aligned}$$

Przykład 3.2

Obliczyć wysokość Słońca o godzinie $7^{15} CET$ dnia 27 IV 1988 r. w Toruniu ($\varphi = 53,1^{\circ}$, $\lambda = 1^h 14^m E$). Uwzględnić refrakcję.

--- ◇◇◇ ---

$$\begin{aligned}
 &Z rocznika astronomicznego odczytujemy (interpolując dane na podaną godzinę UT \\
 &= $CET - 1^h = 6^h 15^m$): $\delta_{\odot} = 13^{\circ} 50' + 19'/4 = 13^{\circ} 55'$, $\Delta\alpha = 2^m 24^s$ \\
 & $T_{\odot} = UT + \Delta\alpha + \lambda = 6^h 15^m + 2^m + 1^h 14^m = 7^h 31^m$ \\
 & $t = T_{\odot} + 12^h = 19^h 31^m = 292,75^{\circ}$ (12^h zamiast dodawać można także odjąć) \\
 & $\sin h = \sin \delta_{\odot} \sin \varphi + \cos \delta_{\odot} \cos \varphi \cos t = 0,19233 + 0,22537 = 0,41771 = \sin 24,6898^{\circ}$ \\
 & $h = 24^{\circ} 41,4'$
 \end{aligned}$$

$$h_{obs} = h + 1' \cdot \cot h = h + 2,2' = 24^{\circ}43,6'$$

Przykład 3.3

Kąt godzinny gwiazdy wynosi $2^h 51^m 2^s$ w chwili $4^h 17^m 20^s$ czasu gwiazdowego (miejscowego). Jaka jest rektascensja gwiazdy?

$$\alpha = T_{\star} - t_{\star} = 4^h 17^m 20^s - 2^h 51^m 2^s = 1^h 26^m 18^s$$

Przykład 3.4

Zegar gwiazdowy w Greenwich wskazuje $22^h 10,6^m$. Jaki jest wtedy czas gwiazdowy w Sydney ($\lambda = 10^h 4,8^m$)?

$$T_{\star\lambda} = T_{\star G} + \lambda = 22^h 10,6^m + 10^h 4,8^m = 32^h 15,2^m = 24^h + 8^h 15,2^m$$

Przykład 3.5

Dnia 20 marca ($\delta_{\odot} = 0^{\circ}$, $\Delta\alpha = -7,5^m$) rano we Lwowie ($\varphi = 49^{\circ}50'$, $\lambda = 1^h 36,1^m$) zmierzono wysokość Słońca $h_{obs} = 26^{\circ}32,0'$ (obarczone refrakcją!). W chwili pomiaru odczytano $8^h 28^m 30^s$ na zegarze mającym wskazywać *CET*. Czy wskazanie zegara było właściwe? Jeśli nie — podać poprawkę.

$$\begin{aligned} h &= h_{obs} - r = 26^{\circ}32' - 1' / \tan 26^{\circ}32' = 26^{\circ}30' \\ \cos t &= \frac{\sin h - \sin 0^{\circ} \sin \varphi}{\cos 0^{\circ} \cos \varphi} = \frac{\sin 26^{\circ}30'}{\cos 49^{\circ}50'} = 0,6918 \\ t &= \pm 46^{\circ}13,5' = \pm 3^h 04,9^m \end{aligned}$$

Z powyższych wybieramy rozwiązanie ujemne, ponieważ obserwacji dokonano rano kiedy Słońce było na wschodniej półkuli nieba. Dalej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T_{\odot} &= t + 12^h = -3^h 04,9^m + 12^h = 8^h 55,1^m \\ T_{\odot}^{\ominus} &= T_{\odot} - \Delta\alpha = 8^h 55,1^m - (-7,5^m) = 9^h 02,6^m \\ UT &= T_{\odot}^{\ominus} - \lambda = 9^h 02,6^m - 1^h 36,1^m = 7^h 26,5^m \\ CET &= UT + 1^h = 8^h 26,5^m. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że zegar spieszy o dwie minuty. Należy więc do wskazania zegara dodać poprawkę $u = -2,0^m$.

Przykład 3.6

Która jest godzina czasu środkowoeuropejskiego, gdy w Warszawie ($\varphi = 52^{\circ}13'$, $\lambda = 1^h 24^m 2^s$) dnia 18 listopada po południu cienie przedmiotów są cztery razy dłuższe niż ich wysokości. Nie uwzględniać refrakcji.

$$\text{Z rocznika mamy dla 18 XI: } \delta_{\odot} = -19^{\circ}5', \Delta\alpha = +14^m 56^s.$$

$$\tan h_{\odot} = \frac{1}{4} = 0,25 \qquad h_{\odot} = 14^{\circ}02'$$

Ze wzoru kosinusowego dla trójkąta paralaktycznego (p. 2.6) jest

$$\cos t = \frac{\sin h_{\odot} - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi}{\cos \delta_{\odot} \cos \varphi} = \frac{0,2425 - (-0,3269) 0,7903}{0,9450 \cdot 0,6127} = 0,8650$$

$$t = \pm 30^{\circ}07' = \pm 2^h 0^m 28^s.$$

Obserwacja ma miejsce po południu bierzemy więc pod uwagę rozwiązanie dodatnie (Słońce na zachodniej półkuli nieba),

$$\begin{aligned} T_{\odot} &= t + 12^h = 14^h 0^m 28^s \\ T_{\odot} &= T_{\odot} - \Delta\alpha = 14^h 0^m 28^s - 14^m 56^s = 13^h 45^m 32^s \\ UT &= T_{\odot} - \lambda = 13^h 45^m 32^s - 1^h 24^m 2^s = 12^h 21^m 30^s \\ CET &= UT + 1^h = 13^h 21,5^m. \end{aligned}$$

Przykład 3.7

Obliczyć moment zachodu Syriusza 20.IV.1988 r. w Bordeaux ($\varphi = 44^\circ 50' 7''$, $\lambda = -0^h 2^m 7^s$).

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Po uwzględnieniu precesji współrzędne Syriusza są:

$$\alpha = 6^h 44^m 38^s \quad \delta = -16^\circ 41' 58''$$

Obliczamy kąt godzinny:

$$\cos t = \frac{\sin(-34') - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = 0,28372 \quad t = 73,577^\circ = 4^h 54^m 4^s$$

Czas gwiazdowy zachodu w Bordeaux: $T_{\star} = \alpha + t = 11^h 38^m 42^s$,
zaś w Greenwich: $GMST = T_{\star} - \lambda = 11^h 40^m 49^s$.

Z rocznika odczytujemy (albo obliczamy) czas o północy UT: $GMST0 = 13^h 53^m 11^s$.

Jest więc: $\Delta T_{\star} = GMST - GMST0 + 24^h = 21^h 47^m 38^s$

oraz: $\Delta T_{\odot} \equiv UT = 21^h 47^m 38^s \cdot 365,2422/366,2422 = 21^h 44^m 4^s$.

Przykład 3.8

Czasy strefowe różnią się od UT w granicach od $+13^h$ (np. na wschodzie ZSRR) do -12^h . O której godzinie CET i którego dnia data 1 stycznia wchodzi na Ziemię i ją opuszcza?

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Kiedy Nowy Rok wchodzi na Ziemię na wschodzie, w 13-tej strefie czasowej, jest wtedy godzina 0 tamtego czasu strefowego czyli godzina $24 - 13 = 11$ UT, albo 12^h CET, poprzedniego dnia (31 XII). Natomiast chwila 24^h 1 stycznia w 12-tej strefie (licząc od Greenwich ku zachodowi) odpowiada 12^h UT, albo 13^h CET dnia 2 stycznia. Zatem Nowy Rok trwa na Ziemi od 12^h 31 XII do 13^h 2 I czasu środkowoeuropejskiego.

Przykład 3.9

Przyjmuje się, że podczas soboru nicejskiego (325 r.n.e.) równonoc wiosenna przypadała na 20 III. Obliczyć na jaką datę kalendarza juliańskiego przypadła ta równonoc w 1582 r. a na jaką w bieżącym (1990) roku.

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Różnica między rokiem juliańskim i zwrotnikowym wynosi ok. $365,25 - 365,2422 = 0,0078$ dnia. Tak więc co rok kalendarza juliańskiego równonoc (a za tym także wszystkie pory roku) cofa się o 0,0078 dnia. Widać już, że numer dnia w marcu, w okolicy którego przypada równonoc, można obliczyć ze wzoru: $N = 20 - (rok - 325) \cdot 0,0078$. Mamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \text{gdy } rok &= 1582 & N &= 20 - 9,8 = 10,2 & (10 \text{ marca}) & \text{ oraz} \\ \text{gdy } rok &= 1990 & N &= 20 - 13,0 = 7,0 & (7 \text{ marca}). \end{aligned}$$

Przykład 3.10

Obliczyć numer dnia juliańskiego w południe ($12^h UT$) dnia 30 IV 1990 r.

- - - - ◊◊ - - - -

Posłużymy się FORTRANowskim wzorem (3.7) pamiętając o obcinaniu części ułamkowych przy dzieleniach i wykonując wskazane operacje od lewej ku prawej stronie:

$$\begin{aligned} JD &= 367 \cdot L - 7 \cdot (L + (M + 9)/12)/4 + 275 \cdot M/9 + N + 1721014 = \\ &= 367 \cdot 1990 - 7 \cdot (1990 + (4 + 9)/12)/4 + 275 \cdot 4/9 + 30 + 1721014 = \\ &= 367 \cdot 1990 - 7 \cdot (1990 + 1)/4 + 1100/9 + 1721044 = \\ &= 730330 - 3484 + 122 + 1721044 = \\ &= 2448012. \end{aligned}$$

Przykład 3.11

Wykładnia marzeń sennych (*oneiromancja*) według sennika egipskiego zależy od faz Księżyca. Do tłumaczenia snu bierze się ten dzień, na który przypada moment układania się do snu. Pierwszy dzień Księżyca przypada na pierwszy dzień nowiu o ile ten następuje w godzinach rannych ($0 - 12^h$), zaś na następny dzień, gdy nów przypadnie na godziny $12 - 24$ (DIANA, 1989). Ułożyć odpowiedni kalendarz na miesiąc luty 2000 r.

- - - - ◊◊ - - - -

W kalendarzu astronomicznym odszukujemy datę nowiu bezpośrednio poprzedzającego zadany okres. W naszym przypadku będzie to 6 I 2000 r. o godzinie $18^{14}UT$, tj. $19^h 14^m$ czasu środkowoeuropejskiego (podany w tabeli na s. 130 wiek Księżyca $0,2^d$ w dniu 7 I oznacza, że nów wypadł $0,2 \cdot 24^h \approx 5^h$ przed północą uniwersalną, czyli ok. $19^h UT$; różnica względem wyżej podanego momentu dokładnego wyniku z zaokrąglenia wieku Księżyca do 0,1 dnia). Ponieważ jest to godzina wieczorna, dzień 7 I przyjmujemy za pierwszy dzień księżycowy. Dalej odliczamy kolejne dni. Formalnie I kwadra przypadnie na 7-my dzień (13 I), pełnia — na 14-ty (20 I) i trzecia kwadra — na 21-szy dzień (27 I) tak, że 1 lutego będziemy mieli 25 dzień Księżyca. Ostatni dzień będzie 29- lub 30-tym, zależnie od momentu następnego nowiu. W lutym 2000 r. nów przypada na $13^h 03^m UT$ dnia 5-tego lutego [wiek Księżyca o północy uniwersalnej 6 lutego wynosi $(13 + 3/60)/24 \approx 0,5$, co też znajdujemy w tabeli zawierającej fazy Księżyca (w p. 8.2)], tj. na godz. 14^{03} czasu środkowoeuropejskiego, zatem pierwszym dniem następnego miesiąca księżycowego będzie 6 II. Oznacza to także, że 5 lutego mamy 29 dzień księżycowy, 12 II — 7, 19 II — 14 zaś 26 II — 21 dzień Księżyca. Ostatni (29) dzień lutego będzie 24 dniem Księżyca.

Rozdział 4

Astronomiczne wyznaczanie położenia

Do wyznaczeń współrzędnych geograficznych, szerokości φ i długości λ potrzebne są w ogólności przyrządy do pomiaru kątów oraz czasu. Rodzaj przyrządu zależy od wymaganej dokładności wyznaczeń. W skrajnym przypadku pomiarów orientacyjnych wysokości i kierunku Słońca posłużymy się *gnomonem*, tj. pionowo zamocowanym prętem. Nieco tylko dokładniejsze są *półkole wierzchołkowe* i *kwadrant*, które służą do mierzenia wysokości gwiazd. Przyrządami o stopniowo wzrastających dokładnościach są: zwykły *sextans* lub jego lotnicza odmiana, *przyrząd uniwersalny*, zwykły lub specjalny (geodezyjny) *teodolit* albo urządzenia stacjonarne: *ekwatoriał* i przyrządy *południkowe*, *przejściowe*. Dokładność wymienionych przyrządów w zasadzie nie schodzi nigdy znacząco poniżej $0,1''$. Dopiero specjalne techniki (wspomniane w rozdz. 2. VLBI, SLR i LLR) i specjalne metody opracowania wyników pozwalają sięgać precyzji rzędu $0,001''$. Do rejestracji czasu wykorzystamy zegar o dokładności zależnej znowu od naszych wymagań — poczynając od zwykłego zegarka, poprzez specjalne chronometry (wahadłowe, kwarcowe) na czas średni słoneczny lub gwiazdowy, a kończąc na wzorcach atomowych. Przy ocenie wymaganej dokładności pomiaru czasu będziemy stosowali przelicznik 1 sekunda czasu na ok. 15 sekund łuku.

W rozdziale tym nie przedstawiamy szczegółów poszczególnych metod lecz tylko ogólne ich idee. Opisy praktycznych zagadnień związanych z klasycznymi metodami wyznaczania położenia i czasu z obserwacji astronomicznych można znaleźć w pracach Opalskiego i Cichowicza (1980), Kępińskiego i Duliana (1961) oraz Kępińskiego (1951).

4.1 Wyznaczanie południka miejscowego (azymutu)

Astronomiczne wyznaczenia współrzędnych geograficznych, czasu i azymutów są podstawowymi zadaniami praktycznymi astronomii geodezyjnej. Stosowane tu metody polegają na nawiązaniu układów odniesienia związanych z Ziemią do układów opartych na gwiazdach lub kwazarach. Do klasycznych wyznaczeń można wykorzystać także obserwacje Słońca, lecz prowadzą one do kilkakrotnie mniej dokładnych wyników niż w przypadku gwiazd. Ich zaletą jest mniejsza uciążliwość przez to, że wykonuje się je za dnia. Wśród

gwiazd najważniejszą, z punktu widzenia wyznaczeń położenia, jest Gwiazda Biegunowa. Jest ona stosunkowo jasna (wielkość gwiazdowa 2,02) zatem może być obserwowana małymi instrumentami podczas zmierzchu lub świtu, kiedy nie ma jeszcze potrzeby uciekania się do sygnałów nocnych przy wyznaczaniu azymutu kierunku ziemskiego.

Nawiązania układów ziemskich realizuje się przez obserwacje obiektów niebieskich z rejestracją czasu w momentach pomiarów wysokości nad horyzontem (h) i/lub azymutu (a). Podczas opracowywania obserwacji wykorzystuje się zależności współrzędnych horyzontalnych (a, h) od równikowych (α, δ) i związek kąta godzinnego z czasem i rektascensją. W ogólności w chwili obserwacji obiektu mamy (wzory (2.2)):

$$\tan a = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta}, \quad (4.1)$$

gdzie kąt godzinny t obliczamy z czasu gwiazdowego: $t = T_{\star} - \alpha$.

4.1.1 Z obserwacji Gwiazdy Biegunowej

Pomiar wysokości Gwiazdy Polarnej oraz zanotowanie czasu w chwili pomiaru pozwala na bardzo dokładne wskazanie południka. Mianowicie, azymut Polaris określa (wzory (2.2))

$$a = 180^\circ - \arcsin \frac{\sin t \cos \delta_p}{\cos h} \approx 180^\circ - (90^\circ - \delta_p) \frac{\sin t}{\cos h}, \quad (4.2)$$

przy tym formuła przybliżona na szerokościach do $+60^\circ$ wprowadza błędy na ogół poniżej $1''$ ale zawodzi dla gwiazd o deklinacjach znacząco mniejszych niż polarnej (δ_p). Z odczytu czasu w momencie obserwacji (przeliczonego na gwiazdowy) i rektascensji obliczamy kąt godzinny ($t = T_{\star} - \alpha$), a obserwowaną wysokość poprawiamy na znane efekty (refrakcję, ewentualnie obniżenie horyzontu i błędy instrumentalne: rektyfikacji, kolimacji, poziomowania i in. — zależnie od przyrządu i sposobu pomiaru). Jeśli nie mierzono wysokości, to w podanych wyrażeniach można podstawić

$$h \approx \varphi + (90^\circ - \delta_p) \cos t - 0,0087[(90^\circ - \delta_p) \sin t]^2 \tan \varphi,$$

gdzie φ jest oceną szerokości geograficznej.

4.1.2 Gwiazdy okołobiegunowe w elongacjach

W pobliżu momentów *elongacji* (największego oddalenia obiektu od południka w azymucie, kiedy trójkąt paralaktyczny staje się prostym) azymut gwiazd zmienia się bardzo wolno. Moment elongacji można przewidzieć na podstawie zależności:

$$t_e = \pm \arccos \frac{\tan \varphi}{\tan \delta} = \pm 2 \arctan \sqrt{\frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi)}}. \quad (4.3)$$

Azymut dla tego momentu można obliczyć z jednego z następujących związków:

$$\begin{aligned}
 a - 180^\circ &= \pm \arcsin \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = \pm \arctan \frac{\cos \delta}{\sqrt{\sin(\delta - \varphi) \sin(\delta + \varphi)}} \\
 &= \pm \arctan \frac{\cos \delta \tan h}{\sin \varphi} = \pm \operatorname{arccot}(\tan \delta \cos h) \\
 &= \pm \operatorname{arccos} \frac{\tan \varphi}{\tan h} = \pm \arctan \frac{\sin h \cos \delta}{\sin(\varphi + h)}, \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

gdzie znaki + lub – wybieramy dla elongacji wschodniej lub zachodniej, odpowiednio.

Wszystkie powyższe wzory uzyskuje się z rozwiązania prostokątnego trójkąta paralaktycznego, do którego mają zastosowanie wzory podane w p. 1.2.6.

4.1.3 Metoda równych wysokości

Na około jedną godzinę przed górowaniem należy zaaretować oś poziomą (oś wysokości) instrumentu pomiarowego i uchwycić gwiazdę na skrzyżowaniu nitek lunetki odczytując azymut i ewentualnie czas. Po jakichś dwóch godzinach należy uczynić to samo z tą samą gwiazdą na tej samej wysokości z drugiej strony południka. Azymut i czas górowania obliczamy jako średnią arytmetyczną odczytów z obu stron południka.

W przypadku rejestracji czasu, przy znajomości rektascensji obserwowanego obiektu, z takich pomiarów można obliczyć także długość geograficzną (rektascensja wskazuje lokalny czas gwiazdowy w chwili górowania).

4.1.4 Azymut w wertykale przedmiotu

Oś pionową (azymutu) teodolitu (lub innego instrumentu) aretuje się na kierunku (lub w polu widzenia lunetki) wybranego przedmiotu terenowego, tj. w wertykale przedmiotu, a następnie obserwuje się przejście jakiejś gwiazdy na dowolnej wysokości w tymże kierunku. Do redukcji obserwacji używa się wzoru (4.1) ze s. 74. Tą metodę można stosować jedynie wtedy, gdy znamy λ i φ .

Seria podobnych obserwacji różnych gwiazd dla wybranego azymutu pozwala, łącznie z a , wyznaczyć także szerokość lub długość geograficzną albo poprawkę zegara przez zastosowanie rachunku wyrównawczego (np. Strzałkowski i Śliżyński 1973) do pomiarów i układu równań obserwacyjnych typu (4.1).

4.2 Wyznaczanie długości geograficznej

Długość geograficzną można wyznaczyć jedynie z porównania czasów lokalnych w dwóch miejscach. Wykorzystuje się tutaj fakt, że różnica czasów miejscowych jest równa różnicy długości geograficznych. Zwykle tą inną długością jest południk zerowy (obserwatorium w Greenwich), dla którego czasem lokalnym jest powszechnie dostępny czas uniwersalny (UT ; uzyskuje się go z czasu koordynowanego, UTC , rozpowszechnianego drogą radiową; p. 3.2.6). Idea pomiaru wywodzi się z następujących związków:

$$\lambda = T_{\odot\lambda} - UT = T_{\star\lambda} - \alpha_{\odot} - UT + 12^h.$$

We wzorze tym rektascensję Słońca średniego (α_{\odot}) można obliczyć, a lokalny czas gwiazdowy $T_{\star\lambda}$ wyznacza się z obserwacji. W praktyce posługujemy się związkami $\lambda = T_{\star\lambda} - T_{\star G}$, w którym $T_{\star G}$, tj. czas gwiazdowy w Greenwich, obliczamy dla chwili (UT) wyznaczenia lokalnego czasu gwiazdowego. Ten ostatni określa się poprzez odnotowanie momentu przejścia dowolnego obiektu (np. gwiazdy) o znanej rektascensji (α_{\star}) przez południk miejscowy. W takim momencie $t = 0^h$, a więc

$$T_{\star\lambda} = \alpha_{\star}.$$

4.3 Wyznaczanie szerokości geograficznej

4.3.1 Z kulminacji gwiazd

Mierzymy wysokość gwiazdy w czasie jej górowania lub dołowania i (po poprawieniu pomiaru na refrakcję i, ewentualnie, inne czynniki) obliczamy szerokość z jednego z poniższych wzorów:

$$\begin{aligned} \varphi &= 90^\circ + \delta - h_g = -90^\circ - \delta - h_d && \text{południowa strona nieba} \\ &= -90^\circ + \delta + h_g = 90^\circ - \delta + h_d && \text{strona północna} \end{aligned}$$

Jeśli tą samą gwiazdę możemy obserwować w czasie jej górowania i dołowania, to dla takiego przypadku mamy:

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \frac{1}{2}(h_g + h_d) && \text{kulminacje z tej samej strona nieba} \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(h_g - h_d) && \text{po przeciwnych stronach zenitu} \end{aligned}$$

4.3.2 Z obserwacji momentów przejść gwiazd przez I wertykał

Jeśli zarejestrujemy chwilę przejścia gwiazdy o znanej deklinacji δ i rektascensji α przez pierwszy wertykał (przy a równym 90 lub 270°) to szerokość można obliczyć z zależności

$$\tan \varphi = \frac{\tan \delta}{\cos(T_{\star} - \alpha)}.$$

W metodzie Struvego wykorzystuje się obserwacje przejścia przez I wertykał tej samej gwiazdy na wschodniej i zachodniej stronie nieba. Rejestruje się czas przejścia gwiazdy przez kilka nitek w polu widzenia przyrządu po obu stronach nitki centralnej skierowanej na I wertykał.

4.3.3 Metoda Talcotta

W celu wyznaczenia szerokości mierzy się różnice odległości zenitalnych dwóch gwiazd w czasie górowania po obu stronach zenitu. Wtedy ma zastosowanie wzór:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_N + \delta_S + z_S - z_N + r_S - r_N),$$

gdzie wskaźniki N i S odnoszą się do strony nieba (północnej i południowej, odpowiednio), z której góruje dana gwiazda, δ jest deklinacją, z — obserwowaną odległością zenitalną ($90^\circ - h_{obs}$) a r — refrakcją odpowiadającą zmierzonej wysokości.

W celu zwiększenia ilości obserwacji, różnice odległości zenitalnych mierzone są także poza południkiem — zwykle symetrycznie z obu jego stron albo niesymetrycznie lecz z dodatkowymi pomiarami czasu. Te pomiary redukuje się później do obserwacji w samym południku.

4.3.4 Metoda Piewcowa

W tej metodzie mierzy się czas przejścia dwóch gwiazd przez ten sam almukantarat (małe koło równoległe do horyzontu). Zmierzone czasy należy przeliczyć na czas gwiazdowy i wówczas można skorzystać z takiego równania:

$$\tan \varphi = \frac{\cos \delta_S \cos(T_{\star S} - \alpha_S) - \cos \delta_N \cos(T_{\star N} - \alpha_N)}{\sin \delta_S - \sin \delta_N},$$

gdzie wskaźniki N i S odróżniają obie gwiazdy i odpowiadające im czasy. Metoda ta jest niewrażliwa na refrakcję (ponieważ w obu pomiarach jest taka sama wysokość).

Najlepsze wyniki osiąga się, gdy obie gwiazdy w czasie pomiaru znajdują się z przeciwnych stron I wertykału ale z tej samej strony nieba (wschodniej lub zachodniej). Specjalne tablice geodezyjne zawierają optymalnie dobrane pary gwiazd (Opalski i Cichowicz, 1980, Mietelski 1979).

4.3.5 Z obserwacji Gwiazdy Biegunowej

Gdy znana jest przynajmniej przybliżona wartość długości geograficznej obserwatora, to szerokość można wyznaczyć na podstawie pomiaru wysokości dowolnej gwiazdy o znanych współrzędnych równikowych i jednoczesnej rejestracji czasu w momencie pomiaru. Z czasu i rektascensji obliczamy kąt godzinny ($t = T_{\star} - \alpha$), a obserwowaną wysokość poprawiamy na znane efekty (instrumentalne, refrakcję, obniżenie horyzontu i tp.) i wtedy

$$\varphi = \arcsin \frac{\sin h}{\sqrt{1 - (\cos \delta \sin t)^2}} - \arctan \frac{\cos t}{\tan \delta}.$$

W przypadku Gwiazdy Biegunowej (Polaris) powyższy wzór można istotnie uprościć ponieważ jej deklinacja (δ_p) jest bliska 90° . Dla tego przypadku zachodzi mianowicie:

$$\varphi = h + (90^\circ - \delta_p) \cdot \left(\frac{1}{2} \cos \delta_p \sin^2 t - \cos t \right). \quad (4.5)$$

Przybliżenie to, w porównaniu z wyżej podanym ścisłym wzorem, wprowadza błędy poniżej $0,3''$ na szerokościach mniejszych od $+65^\circ$. Bliskość bieguna powoduje, że wyznaczenie takie jest mało wrażliwe na błędy kąta godzinnego — szczególnie, gdy obserwacje przeprowadza się w pobliżu kulminacji.

4.4 Technika interferometrii wielkobazowej (VLBI)

Jednym z najprecyzyjniejszych instrumentów geodezyjnych jest radiowy interferometr o bardzo długiej bazie, VLBI (od ang. Very Long Baseline Interferometry). Jest to stosunkowo nowa technika (pierwsze pomiary wykonano w końcu lat 60-tych) wyznaczania współrzędnych na powierzchni Ziemi. Ta radioastronomiczna technika pozwala osiągać dokładności porównywalne lub przewyższające satelitarne techniki laserowe.

Dzięki dotychczasowym pomiarom po raz pierwszy udało się bezpośrednio wyznaczenie prędkości oddalania się kontynentu Ameryki Północnej od Europy (właściwie tektonicznych płyt: północnoamerykańskiej i euroazjatyckiej) na około 1,5 cm/rok. Na bazie specjalnej sieci interferometrów VLBI zorganizowano nową służbę rotacji Ziemi i ruchu jej biegunów, która obecnie zastępuje działające dotąd (do 1987 r.) służby oparte o instrumenty klasyczne (o dokładnościach około rzędu wielkości gorszych).

Miarą odległości d dwóch punktów pomiarowych jest względne opóźnienie zarejestrowanych sygnałów z radioźródła (zwane *zapóźnieniem grupowym*, po ang. *group delay*). Wysoka dokładność pomiaru zapóźnienia uzależniona jest przede wszystkim od stabilności wzorców częstotliwości i czasu (wymaga się wzorców atomowych), szerokości zapisywanego pasma częstości radiowych (stosuje się specjalne techniki syntezy szerokiego pasma i wielościeżkowe magnetowidy), czułości systemów odbiorczych (radioteleskopy o kilkudziesięciometrowych średnicach głównych reflektorów oraz niskoszumowe odbiorniki) i od sumarycznego czasu prowadzenia obserwacji. Proces pomiarowy jest więc dość złożony i kosztowny, zwłaszcza jeśli jeszcze uwzględnimy opracowanie wyników obserwacji, które zawiera wiele etapów i w sumie jest stosunkowo skomplikowane. Z drugiej strony, trudno byłoby przecenić wartość wyników pomiarów VLBI — zarówno z punktu widzenia geodezji, jak i astronomii.

Geometria interferometru VLBI

W rozważaniach teoretycznych i w praktycznym opracowywaniu obserwacji wykorzystuje się przybliżoną znajomość geometrii sieci VLBI. Rozpatrzmy tutaj tylko najistotniejsze geometryczne aspekty tego procesu dla pojedynczej bazy. Niech $\Delta X = X_2 - X_1$, $\Delta Y = Y_2 - Y_1$ i $\Delta Z = Z_2 - Z_1$ oznaczają różnice współrzędnych kartezjańskich dwóch stacji VLBI znajdujących się na końcach wektora bazy $\vec{d}(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$. Modelowym zapóźnieniem grupowym, τ , będzie rzut tego wektora na kierunek obserwowanego radioźródła (podzielony przez prędkość światła, c).

Składowa bazy prostopadła do tego kierunku (styczna do sfery niebieskiej w miejscu źródła) po podzieleniu przez długość fali obserwowanego promieniowania (λ) jest tzw. *częstością przestrzenną*. Mówi ona na jakiej częstości *widmowej* aktualnie mierzymy (amplitudę i fazę sygnału z interferometru, czyli) fourierowskie widmo rozkładu jasności źródła. Odwrotna transformacja Fouriera zmierzonego widma (zsumowanie sinusoid o obliczonych częstościach przestrzennych i amplitudach i fazach równych zmierzonym amplitudom i fazom sygnału) daje wprost obraz radioźródła (rozkład jasności).

Bazę interferometru można przedstawić w układzie równikowym godzinnym:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} && \text{— długość bazy} \\ t_b &= \arctan \frac{-\Delta Y}{\Delta X} && \text{— kąt godzinny} \\ \delta_b &= \arcsin \frac{\Delta Z}{d} && \text{— deklinacja.} \end{aligned}$$

Zakładając, że na tym samym południku geograficznym, dla którego zdefiniowaliśmy t_b , tj. dla południka Greenwich, współrzędne równikowe źródła wynoszą t i δ łatwo znajdujemy kosinus kąta pomiędzy kierunkami bazy i źródła: $\cos \theta = \sin \delta \sin \delta_b + \cos \delta \cos \delta_b \cos(t - t_b)$. Zapóźnienie sygnałów wyniesie zatem:

$$\tau = \frac{d}{c} \cos \theta = \frac{d}{c} [\sin \delta \sin \delta_b + \cos \delta \cos \delta_b \cos(t - t_b)]. \quad (4.6)$$

Ortogonalna do kierunku źródła składowa bazy to oczywiście $d \sin \theta$, którą rozkłada się dalej na składową równoległą do płaszczyzny równika $d \sin \theta \sin \psi$ (w kierunku wzrostu rektascensji) i styczną do południka przechodzącego przez źródło $d \sin \theta \cos \psi$ (w kierunku deklinacji), gdzie ψ jest kątem przy źródle między łukiem θ i wspomnianym południkiem — wewnątrz trójkąta sferycznego o wierzchołkach w biegunie nieba, na kierunku bazy i źródła. Nietrudno zauważyć, że (wzór sinusów i wzór mieszany trygonometrii sferycznej):

$$\sin \theta \sin \psi = \cos \delta_b \sin(t - t_b)$$

oraz

$$\sin \theta \cos \psi = \sin \delta_b \cos \delta - \cos \delta_b \sin \delta \cos(t - t_b).$$

Tak więc częstości przestrzenne przyjmują postać:

$$u = \frac{d}{\lambda} \cos \delta_b \sin(t - t_b)$$

$$v = \frac{d}{\lambda} [\sin \delta_b \cos \delta - \cos \delta_b \sin \delta \cos(t - t_b)].$$

Otrzymane wyniki możemy wyrazić bezpośrednio przez wielkości dane podstawiając $\arctan(-\Delta Y/\Delta X)$ za t_b i $\arcsin(\Delta Z/d)$ za δ_b :

$$\begin{aligned} u \cdot \lambda &= \Delta X \sin t + \Delta Y \cos t \\ v \cdot \lambda &= -(\Delta X \cos t - \Delta Y \sin t) \sin \delta + \Delta Z \cos \delta \\ \tau \cdot c &= (\Delta X \cos t - \Delta Y \sin t) \cos \delta + \Delta Z \sin \delta \end{aligned} \quad (4.7)$$

Uwaga: Przy wyprowadzaniu wzorów (4.7) przyjęliśmy, że współrzędna Y jest określona dodatnio na wschód (w płaszczyźnie równika, od środka Ziemi w kierunku południka 90°E). Jeśli nasze współrzędne kartezjańskie określono w układzie lewoskrętnym (Y na zachód) to w powyższych wzorach należy wszędzie zamienić znak przy ΔY lub tylko przy Y_1 i Y_2 .

W Polsce mamy tylko jedną stację VLBI — przy UMK w Toruniu (na razie z małą 15-metrową anteną, lecz dwukrotnie większy radioteleskop jest już w budowie). Na świecie można doliczyć się dzisiaj około 40 stacji wyposażonych na ogół w nowoczesny sprzęt elektroniczny i duże anteny.

Mimo praktycznej złożoności tej techniki idea geodezyjnych i astrometrycznych pomiarów VLBI jest prosta. Jeśli znamy przybliżone położenia obserwowanych radioźródeł na niebie i zmierzmy różnice dróg od tych źródeł do poszczególnych stacji VLBI (tzn. zapóźnienia pomnożone przez prędkość światła) to, przy zgrubnej znajomości położenia tych stacji, możemy jednoznacznie rozwiązać układ równań obserwacyjnych zawierający dokładne współrzędne stacji i radioźródeł. Praktyczne dokładności jakie się osiąga obecnie (1990 r.) są rzędu jednego centymetra na odległościach Europa–Ameryka, a na krótszych bazach (np. z Wettzell w RFN do Onsali w Szwecji) błąd pomiaru odległości nie przekracza 1 mm.

W ciągu kilku ostatnich lat udoskonalano technikę VLBI w zastosowaniu do celów astrometryczno–geodezyjnych. Rezultatem jest wspomniana już centymetrowa dokładność pomiarów odległości na bazach międzykontynentalnych i milisekundy łuku w pozycjach radioźródeł. Jak dowiadujemy się z *Annual Report for 1989* (s. IV–1) ostatnio uzyskano poprawę dokładności takich pomiarów o około rząd wielkości (!) na drodze poszerzenia pasma częstotliwości rejestrowanych sygnałów, sposobu prowadzenia obserwacji, poprawienia stabilności systemów odbiorczych i udoskonalenia opracowania obserwacji. Po pełnym wprowadzeniu do praktyki tych osiągnięć (co zajmie 1–2 lata) możemy się spodziewać bardzo interesujących wyników zarówno z punktu widzenia geofizyków jak i astronomów.

4.5 Przykłady

Przykład 4.1

Zmierzono odległość zenitalną gwiazdy o deklinacji $\delta = -18^{\circ}38'25''$ podczas kulminacji górnej z południowej strony zenitu: $z_{obs} = 50^{\circ}48'45''$. Obliczyć szerokość geograficzną miejsca obserwacji.

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Refrakcja dla tej wysokości wynosi: $r = 1' \cdot \tan z_{obs} = 1,23'$

Zredukowana odległość zenitalna: $z = z_{obs} + r = 50^{\circ}49,98'$

Szerokość geograficzna: $\varphi = \delta + z = -18^{\circ}38,4' + 50^{\circ}49,98' = 32^{\circ}11,6'$

Przykład 4.2

Z obserwacji Gwiazdy Biegunowej otrzymano $h_{obs} = 49^{\circ}56'15''$ przy kącie godzinnym $t = 3^h 10^m$. Obliczyć szerokość geograficzną miejsca obserwacji jeśli $\delta_p = 89^{\circ}4'40''$.

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

$$h = h_{obs} - 1' / \tan h_{obs} = 49^{\circ}56'15'' - 50'' = 49^{\circ}55'25''$$

$$\varphi = h + (90^{\circ} - 89^{\circ}4'40'') \cdot (0,5 \cos 89^{\circ}4'40'' \sin^2 3^h 10^m - \cos 3^h 10^m) =$$

$$= h + 3320''(0,004374 - 0,67559) = h - 2228,44'' = 49^{\circ}18'17''$$

Przykład 4.3

Zmierzono wysokość górowania i dołowania tej samej gwiazdy po północnej stronie zenitu. Zredukowane pomiary wyniosły: $h_d = 44^\circ 20'$, $h_g = 74^\circ 15'$. Obliczyć szerokość geograficzną i deklinację obserwowanej gwiazdy.

--- ◇◇◇ ---

$$\varphi = \frac{h_d + h_g}{2} = 59^\circ 17' 30''$$

$$\delta = 90^\circ - \frac{h_g - h_d}{2} = 90^\circ - 14^\circ 57' 30'' = 75^\circ 2' 30''.$$

Przykład 4.4

Powtórzyć przykład 4.3 przy założeniu, że górowanie odbyło się po stronie południowej (dołowanie po północnej stronie).

--- ◇◇◇ ---

$$\varphi = \frac{h_d + 180^\circ - h_g}{2} = 90^\circ - \frac{h_g - h_d}{2} = 90^\circ - 14^\circ 57' 30'' = 75^\circ 2' 30''$$

$$\delta = 90^\circ - \frac{180^\circ - h_g - h_d}{2} = \frac{h_d + h_g}{2} = 59^\circ 17' 30''.$$

Przykład 4.5

W którym miejscu na Ziemi Słońce jest w zenicie dnia 15 marca ($\delta_\odot = -1^\circ 59'$, $\Delta\alpha = -8,9^m$) o godz. 10 *CET*?

--- ◇◇◇ ---

$$\varphi = \delta = -1^\circ 59'$$

$$\lambda = 12^h - (UT + \Delta\alpha) = 12^h - CET + 1^h - \Delta\alpha = 12^h - 10^h + 1^h - (-8,9^m) = 3^h 8,9^m$$

Przykład 4.6

Dnia 21 listopada ($\delta_\odot = -20^\circ 0'$, $\Delta\alpha = +14,0^m$) o $10^h 44^m$ *CET* zaobserwowano górowanie Słońca po stronie południowej na wysokości $h_g = 19^\circ 33'$. Obliczyć współrzędne miejsca obserwacji.

--- ◇◇◇ ---

$$h_g = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot = 19^\circ 33'$$

$$\varphi = 90^\circ - 19^\circ 33' + (-20^\circ) = 50^\circ 27'$$

$$\lambda = UT - T_\odot = (CET - 1^h) - (T_\odot - \Delta\alpha) = 9^h 44^m - 11^h 46^m = -2^h 02^m.$$

Przykład 4.7

Dnia 1 IV 1953 r. w Politechnice Warszawskiej ($\varphi = 52^\circ 13' 21,0''$, $\lambda = 1^h 24^m 02,4^s$) ze stanowiska „słup S” zmierzono moment przejścia prawego ($10^h 54^m 17,9^s$) i lewego ($10^h 58^m 51,1^s$) brzegu tarczy Słońca przez nitkę pionową instrumentu pomiarowego. Zredukowany odczyt koła poziomego wyniósł $4^\circ 58' 55,2''$. Wiedząc, że poprawka chronometru względem czasu *UT* wynosiła $-1^m 34,2^s$ obliczyć azymut przedmiotu ziemskiego, dla którego średni z kilku celowań odczyt koła poziomego wyniósł $197^\circ 35' 47,5''$.

--- ◇◇◇ ---

Średni czas obserwacji: $UT = \frac{1}{2}(10^h 54^m 17,9^s + 10^h 58^m 51,1^s) - 1^m 34,2^s = 10^h 55^m 0,3^s$. Dla tego momentu interpolujemy dane z rocznika, albo obliczamy bezpośrednio, deklinację Słońca i równanie czasu:

$$\delta_{\odot} = 4^{\circ}31'01,6'' \quad \Delta\alpha = -3^m57,80^s.$$

Obliczamy teraz kolejno:

$$\begin{aligned} t &= UT + \Delta\alpha + \lambda - 12^h = 0^h 15^m 04,9^s = 3,77042^{\circ} \\ \tan a &= \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta} = \frac{0,0657587}{0,7402883} = 0,0888284 \\ a &= 5,07617^{\circ} = 5^{\circ}4'34,2'' \\ a_{\oplus} &= 197^{\circ}35'47,5'' + (a - 4^{\circ}58'55,2'') = 197^{\circ}41'26,5''. \end{aligned}$$

Przykład 4.8

Dnia 18.06.1984 r. przeprowadzono 12-godzinne obserwacje VLBI radioźródła 3C286 ($\delta = 30^{\circ}35'34''$) na fali 21 cm w celach związanych z badaniami rozkładu jasności. Wśród uczestniczących stacji były m.in. Toruń i Onsala (Szwecja). Na skutek niedokładnej znajomości współrzędnych toruńskiej stacji korelacja danych na bazie Toruń-Onsala wykazała znaczne sinusoidalne (dobowe) zmiany zapóźnienia rezidualnego (reszkowego). Wartość zapóźnienia w minimum wyniosła $\tau_1 = 15,58 \mu\text{s}$, a po około 6 godzinach wzrosła do $\tau_2 = 15,80 \mu\text{s}$. Ocenic błąd składowej równikowej wektora stacji toruńskiej przyjętej do korelacji obserwacji.



W korelatorze VLBI następuje efektywnie odejmowanie modelu geometrycznego zapóźnienia od wartości obserwowanej. Różnice takie, albo zapóźnienia reszkowe, możemy formalnie opisać analogicznie jak zapóźnienie geometryczne z tym, że zamiast bazy występuje teraz błąd bazy:

$$\tau \cdot c = r \cos \delta \cos(t - t_r) + b \sin \delta + \text{const},$$

gdzie r i b są składową równikową i biegunową błędu (por. równanie (4.6)), zaś const grupuje pewne stałe. W naszym przypadku dla obu wartości zapóźnienia, τ_1 i τ_2 , składniki $b \sin \delta + \text{const}$ są takie same. Mamy więc natychmiast:

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{r}{c} \cos \delta$$

[$\cos(t_1 - t_r) = -1$ i $\cos(t_2 - t_r) = 0$] skąd

$$r = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\cos \delta} c = \frac{0,22 \cdot 10^{-6} \text{s}}{0,860806} 299792458 \text{ m/s} = 76 \text{ m}.$$

Taki błąd bazy odpowiada zmianie współrzędnych geograficznych o około $2,5''$.

Uwaga: Czytelnik nie powinien traktować zbyt serio przeprowadzonego rachunku, gdyż zaniedbaliśmy wiele bardzo ważnych poprawek (takich jak na ruch biegunów, opóźnienie sygnałów w atmosferze, nutację współrzędnych radioźródła i in.). Poprawki składowych wektora położenia stacji VLBI normalnie otrzymuje się z wielu pomiarów zapóźnienia i z obserwacji wielu radioźródeł poprzez dopasowanie modelu do wyników obserwacji metodą najmniejszych kwadratów.

Rozdział 5

Nawigacja astronomiczna

Zadaniem nawigacji jest wyznaczanie pozycji statku (samolotu) i jego kursu. Podstawowym środkiem prowadzącym do tego celu są pomiary wysokości obiektów niebieskich (Słońca, Księżyca, gwiazd) za pomocą sekstansu. Pomiary takie wymagają szeregu poprawek: na błędy instrumentalne (błąd certyfikatu), fakt pomiaru krawędzi dysku (np. Słońca), paralaksę horyzontalną (dla ciał bliskich; p. 2.4.3), obniżenie horyzontu fizycznego (p. 2.4.2) i refrakcję (p. 2.4.1).

Mila morska jako często używana w nawigacji powietrznej i morskiej jednostka długości jest odległością na powierzchni Ziemi odpowiadającą łukowi $1'$ wielkiego koła przy założeniu pewnego średniego promienia Ziemi: $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$. W rzeczywistości, z powodu eliptyczności globu ziemskiego, jedna minuta łuku ma różną wartość na różnych szerokościach geograficznych (w metrach):

$1852,2225 - 9,3307 \cdot \cos 2\varphi + 0,0195 \cdot \cos 4\varphi$ — w szerokości oraz

$1856,8880 \cdot \cos \varphi - 1,5585 \cdot \cos 3\varphi + 0,0020 \cdot \cos 5\varphi$ — w długości geograficznej.

$0,1 \text{ Mm}$ nazywa się *kablem*.

Z omawianym już obniżeniem horyzontu (s. 25) łączy się *zasięg widoczności* (albo *odległość widnokregu*) na morzu, który, w milach morskich, wynosi

$$d = 2,08\sqrt{H}, \quad (5.1)$$

gdzie wysokość obserwatora nad powierzchnią morza H wyrażono w metrach, a współczynnik liczbowy uwzględnia średni wpływ refrakcji. Trzeba zawsze pamiętać, że wartość zasięgu widoczności silnie zależy od refrakcji, a ta — od warunków atmosferycznych. Czyni to, że na ogół nie jest uzasadnione stosowanie dokładniejszego przybliżenia niż $2\sqrt{H}$. Niekiedy jednak stosuje się poprawkę na różnicę temperatury powietrza (θ_p) i wody (θ_w),

$$0,4(\theta_p - \theta_w),$$

którą dodaje się do d ze wzoru (5.1).

W żeglarskim stosuje się metodę oceny odległości obiektu ukazującego się na widnokregu, która jest sumą odległości widnokregu obserwatora i obiektu (o wysokości H'):

$$2(\sqrt{H} + \sqrt{H'}) \quad [\text{Mm}].$$

5.1 Wyznaczanie pozycji statku

Pozycję statku wyznacza się za pośrednictwem określenia położenia tzw. *punktów podgwiezdnych (podslonecznych)*. Są to miejsca na powierzchni Ziemi, w których aktualnie obserwowany obiekt znajduje się w zenicie. Nietrudno jest zauważyć, że szerokość geograficzna punktu podgwiezdnego jest równa deklinacji obiektu:

$$\varphi_p = \delta$$

Ponieważ obiekty przechodzące przez zenit mają zerowy kąt godzinny, to w takim punkcie $T_{\star p} = \alpha = GAST + \lambda_p$ ($GAST$ określiliśmy na s. 52) lub, dla przypadku obserwacji Słońca, $T_{\odot p} = 12^h = UT + \Delta\alpha + \lambda_p$, gdzie $\Delta\alpha$ jest równaniem czasu (tj. różnicą między czasem słonecznym prawdziwym i średnim). Mamy więc:

$$\lambda_p = \alpha - GAST$$

lub

$$\lambda_p = 12^h - UT - \Delta\alpha$$

Wszyscy obserwatorzy znajdujący się na powierzchni Ziemi w odległości kątowej z (z perspektywy środka Ziemi) od punktu podgwiezdnego będą widzieli daną gwiazdę w odległości zenitalnej z . Mierząc więc tą odległość możemy stwierdzić, że znajdujemy się na małym okręgu o promieniu z ze środkiem w punkcie podgwiezdnym. Okrąg taki nazywa się *kołem pozycyjnym Sumnera*. Obserwacja dwóch obiektów pozwala zredukować niepewność wyznaczenia naszej pozycji z pełnego okręgu do dwóch punktów przecięcia się dwóch kół Sumnera. Na podstawie przybliżonej orientacji zwykle potrafimy wybrać właściwy z dwóch punktów określający pozycję statku (inaczej należałoby przeprowadzić trzecią obserwację).

W praktyce w ogóle nie rysuje się kół pozycyjnych (trzebaby dysponować globusem) lecz tylko ich fragmenty przybliżone odcinkiem prostej na mapie. Taką prostą nazywa się *linią pozycyjną*; jej kierunek ustala pozycja zliczeniowa (ocena uzyskana w oparciu o poprzednie wyznaczenie położenia) a odległość od punktu podslonecznego — obserwowana odległość zenitalna.

Nawigacja dzienna opiera się głównie na obserwacjach Słońca prowadzonych w odstępach kilkugodzinnych co, przy orientacyjnej znajomości pozycji oraz przy uwzględnieniu kursu i prędkości statku, umożliwia efektywne wykorzystanie opisanej idei słusznej w zasadzie w przypadku prawie jednoczesnych obserwacji kilku gwiazd. Na tych przesłankach opiera się m.in. rachunkowo-graficzna *metoda Sumnera* i *metoda St. Hilaire'a* (np. Mietelski 1979). W praktycznych zastosowaniach tej drugiej metody, przy obliczaniu azymutu i wysokości Słońca, używa się *suwaka walcowego Bygrave'a*, który może być dziś z powodzeniem zastąpiony przez kalkulatory elektroniczne.

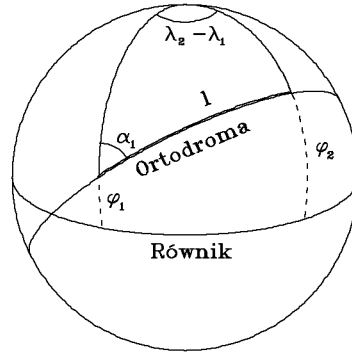
5.2 Wyznaczanie kursu po ortodromie

Prostobieżnia albo *ortodroma* jest najkrótszą drogą pomiędzy dwoma punktami na sferze — jest fragmentem koła wielkiego. Miarą odległości punktów o znanych współrzędnych geograficznych jest kąt, pod jakim widać je ze środka Ziemi:

$$l = \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)] \quad (5.2)$$

$$= 2 \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}$$

gdzie wskaźniki 1 i 2 odróżniają współrzędne: φ — szerokość i λ — długość geograficzną. Odległość kątową można łatwo zamienić na liniową pamiętając, że 1' na Ziemi to 1 Mm.



Rys. 5.1 Ortodroma jest najkrótszą drogą pomiędzy dwoma punktami na sferze

Kurs, definiowany jako kąt między kierunkiem północy i kierunkiem podróży, na początku podróży (wskaźnik 1) i na jej końcu (2) określają wzory:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos l}{\cos \varphi_1 \sin l} \quad \text{i} \quad \cos \alpha_2 = \frac{-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos l}{\cos \varphi_2 \sin l},$$

odpowiednio. Pozostawiają one pewną, w rzeczywistości niegroźną, niejednoznaczność wyboru ćwiartki, dlatego niekiedy korzysta się z innej pary równań:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \varphi_1 \tan \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ \tan \alpha_2 &= \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{-\cos \varphi_2 \tan \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aby sprawdzić czy droga nie przebiega np. zbyt blisko granicy lodów, trzeba określić także współrzędne wierzchołka ortodromy (jej punktu najbliższego bieguna geograficznego):

$$\cos \varphi_w = \cos \varphi_1 |\sin \alpha_1| = \cos \varphi_2 |\sin \alpha_2|$$

$$\cot(\lambda_w - \lambda_1) = \sin \varphi_1 \tan \alpha_1$$

(użyliśmy bezwzględnej wartości $\sin \alpha$ aby rozwiązanie uczynić niewrażliwym na zmianę kursu o 180° , która wszak nie zmienia ortodromy a jedynie zwrot kierunku).

Tylko na mapach *gnomonicznych*¹ ortodroma jest linią prostą.

¹mapa gnomoniczna jest odwzorowaniem powstającym jako rzut środkowy punktów na powierzchni sfery, wzdłuż promieni rzutujących poprowadzonych ze środka sfery, na płaszczyznę styczną do sfery

5.3 Wyznaczanie kursu po loksodromie

Podczas podróży najkrótszą trasą (po ortodromie) trzeba stale korygować kurs α . *Loksodroma* albo *skośnobieźnia* to taka krzywa, która przecina wszystkie południki pod tym samym kątem. Na mapach w rzucie Merkatora krzywa ta staje się linią prostą. Tradycyjnie statki poruszały się po loksodromach. Obecnie, ze względów ekonomicznych, planuje się trasy kombinowane z odcinków loksodromy przybliżających ortodromę.

Łatwo jest zauważyć, że dla bliskich punktów na kuli ziemskiej słuszne jest przybliżenie

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cos \varphi_1 = \tan \alpha,$$

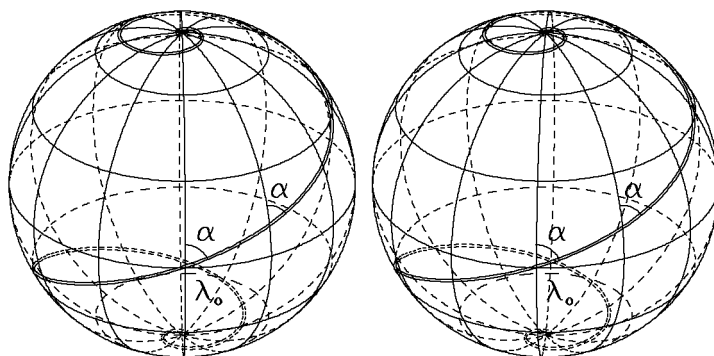
które w granicy nieskończenie bliskich punktów przechodzi w równanie różniczkowe $d\lambda/d\varphi = \tan \alpha / \cos \varphi$, które z kolei prowadzi (po scałkowaniu) do *równania loksodromy*:

$$\lambda = \tan \alpha \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \lambda_0 + \tan \alpha \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

w którym stała całkowania, λ_0 , jest długością geograficzną (w radianach) punktu przecięcia równika przez loksodromę. W oparciu o to równanie nietrudno już pokazać, że

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{131,93 \left[\log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]}, \quad (5.4)$$

gdzie λ wyrażone są w stopniach.



Rys. 5.2 Loksodroma dla kursu α przecina wszystkie południki pod tym samym kątem, a równik — na długości geograficznej λ_0 . W celu uzyskania obrazu stereoskopowego rysunek należy oglądać z odległości około 20 cm patrząc poza jego płaszczyznę — tak, by jego lewa część pokryła się z prawą

Długość drogi po loksodromie wynosi

$$l = \left| \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\cos \alpha} \right| = |\varphi_2 - \varphi_1| \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad (5.5)$$

albo, gdy $\alpha = \pm 90^\circ$ czyli $\varphi_1 = \varphi_2$,

$$l = |\lambda_2 - \lambda_1| \cos \varphi_1.$$

5.4 Przykłady

Przykład 5.1

Na morzu z wysokości ocznej 4 m dostrzeżono odkrywające się światło latarni, znajdujące się na wysokości 16 m nad poziomem morza. Obliczyć odległość od latarni.

- - - $\diamond\diamond$ - - -

$$d = 2 \left(\sqrt{H} + \sqrt{H'} \right) = 2 \left(\sqrt{4} + \sqrt{16} \right) \text{ Mm} = 12 \text{ Mm}$$

Przykład 5.2

Obliczyć odległość z Lizbony ($\varphi_1 = 38^\circ 43'$, $\lambda_1 = 0^h 36^m 45^s$) do Władystoku ($\varphi_2 = 43^\circ 7'$, $\lambda_2 = 8^h 47^m 36^s$).

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Długość ortodromy wynosi (wzór (5.2)):

$$l = \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)] =$$

$$= \arccos[0,6255 \cdot 0,6835 + 0,7802 \cdot 0,7300(-0,7781)] = \arccos(-0,01569) = 90^\circ 53,9',$$

gdzie wzięliśmy $\lambda_2 - \lambda_1 = 141^\circ 5' 15''$. Odległości kątovej $90^\circ 53,9'$, odpowiada odległość liniowa $90,898 \cdot 111,2 \text{ km} = 10108 \text{ km}$.

Przykład 5.3

Ile można zaoszczędzić czasu lecąc po ortodromie, zamiast po loksodromie z Warszawy ($\varphi_1 = 52^\circ$, $\lambda_1 = 21^\circ$) do Nowego Jorku ($\varphi_2 = 41^\circ$, $\lambda_2 = -74^\circ$) z szybkością 1000 km/godz.?

- - - $\diamond\diamond$ - - -

Długość ortodromy wynosi (jak w przykładzie 5.2)

$$l_o = \arccos(0,476485) = 61,544^\circ.$$

Dla loksodromy mamy zaś (p. 5.3, wzór (5.4))

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{131,93 [\log \tan(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}) - \log \tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})]} = \frac{-95}{+16,0601} = -5,91527$$

$$l_l = |\varphi_1 - \varphi_2| \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 11 \cdot 5,9992 = 65,991^\circ$$

tak, że różnica dróg wynosi

$$l_l - l_o = 4,447^\circ = 4,447 \cdot 111,2 \text{ km} = 494,5 \text{ km}$$

Wynika z tego, że oszczędność na czasie wyniesie $(494,5/1000)^h \approx 0,5^h$.

Przykład 5.4

Jacht znajduje się w pozycji o współrzędnych $\varphi_1 = +58^\circ 10'$, $\lambda_1 = -14^\circ 00'$. Punkt docelowy ma współrzędne: $\varphi_2 = +46^\circ 30'$, $\lambda_2 = -52^\circ 55'$. Określić (a) długość odcinka ortodromy między punktem wyjścia a punktem docelowym, (b) kurs początkowy, (c) końcowy kurs, (d) punkty zwrotu, przy założeniu, że ortodroma zostanie zastąpiona czterema odcinkami loksodromy, (e) współrzędne wierzchołka ortodromy.

- - - - $\diamond\diamond\diamond$ - - - -

$$\cos l = 0,61627 + 0,28249 = 0,89876$$

albo

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 = -38^\circ 55' & \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = -11^\circ 40' \\ \sin^2 \frac{l}{2} &= \sin^2 \frac{-38^\circ 55'}{2} \cos 58^\circ 10' \cos 46^\circ 36' + \sin^2 \frac{-11^\circ 40'}{2} \end{aligned}$$

$$l = 26^\circ = 26 \cdot 60' = 1560' = 1560 \text{ Mm}$$

Z tablic nawigacyjnych można odczytać kursy:

$$\alpha_1 = 261^\circ \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 = 229,5^\circ$$

(ściślejszym rachunkiem bez tablic dostalibyśmy:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos l}{\cos \varphi_1 \sin l} = -0,16518 & \text{bądź} & \tan \alpha_1 = \frac{-0,62819}{-0,10521} \\ \alpha_1 &= 260,49^\circ \quad \text{oraz} & & \\ \cos \alpha_2 &= \frac{-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos l}{\cos \varphi_2 \sin l} = -0,6549 & \text{bądź} & \tan \alpha_2 = \frac{-0,62819}{-0,54437} \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = 229,09^\circ)$$

Ortodromę dzielimy na cztery jednakowe odcinki — po $(1560 \text{ Mm})/4 = 390 \text{ Mm}$. Odcinki te będą połączone trzema punktami zwrotu (zmiany kursu). Ponieważ różnica między początkowym i końcowym kursem wynosi $31,5^\circ$, za każdym razem należy zmienić kurs o $31,5^\circ/3 = 10,5^\circ$. Kurs pierwszego odcinka będzie zgodny z kursem ortodromy, — drugiego wyniesie $261^\circ - 10,5^\circ = 250,5^\circ$, — trzeciego $250,5^\circ - 10,5^\circ = 240^\circ$, a na ostatnim odcinku kurs będzie zgodny z końcowym kursem ortodromy.

Współrzędne wierzchołka ortodromy:

$$\varphi_w = \arccos(\cos 58^\circ 10' |\sin 261^\circ|) = \pm 58^\circ 36'$$

$$\cot(\lambda_w - \lambda_1) = \sin 58^\circ 10' \tan 261^\circ = 5,36407 = \cot 10,56017^\circ$$

$$\lambda_w = \lambda_1 + 10^\circ 34' = -3^\circ 26' \quad \text{lub} \quad \lambda_w = \lambda_1 + 10^\circ 34' \pm 180^\circ = 176^\circ 34'$$

Mamy więc dla północnego wierzchołka $\varphi = +58^\circ 36'$, $\lambda = -3^\circ 26'$, a dla południowego odpowiednio $-58^\circ 36'$, $176^\circ 34'$.

Przykład 5.5

Statek wyruszył z punktu o współrzędnych $\varphi = 60^\circ \text{N}$, $\lambda = 20^\circ \text{W}$. Jaka byłaby pozycja statku po przepłynięciu 100 Mm kursem 150° po loksodromie, a jaka po ortodromie?

- - - - $\diamond\diamond\diamond$ - - - -

Przybliżenie płaskie:

$$\Delta\varphi = l \cos \alpha = 100 \cos 150^\circ = -86,6' = -1^\circ 26,6'$$

$$\Delta\lambda = \frac{l \sin \alpha}{\cos(\varphi + \Delta\varphi/2)} = \frac{50'}{\cos 59^\circ 16,7'} = 97,87' = 1^\circ 37,87'$$

$$\varphi_k = \varphi + \Delta\varphi = +60^\circ - 1^\circ 26,6' = 58^\circ 34,4' \text{N}$$

$$\lambda_k = \lambda + \Delta\lambda = -20^\circ + 1^\circ 37,9' = 18^\circ 22,1' \text{W}$$

Rachunek ścisły dla loksodromy:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_k - \varphi = l \cos \alpha = -1^\circ 26,6' \\ \Delta\lambda &= \tan \alpha \cdot 131,93 \cdot \log \frac{\tan(45^\circ + \varphi_k/2)}{\tan(45^\circ + \varphi/2)} = -0,57735 \cdot 131,93 \cdot \log \frac{3,55245}{3,73205} = \\ &= -0,57735 \cdot (-2,82587) = +1,63152^\circ = 1^\circ 37,89'\end{aligned}$$

Rachunek ścisły dla ortodromy:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_k &= \sin \varphi \cos l + \cos \varphi \sin l \cos \alpha = 0,86575 - 0,01091 = 0,85484 = \sin 58,7425^\circ \\ \varphi_k &= 58^\circ 44,6' \\ \sin \Delta\lambda &= \sin l \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_k} = 0,02427 = \sin 1,3908^\circ \\ \Delta\lambda &= 1^\circ 23,4'\end{aligned}$$

Przykład 5.6

Jacht żeglował kursem 330° . W dniu 15 lipca 1990 r. o godz. $07^h 48^m 12^s UT$, na pozycji zliczeniowej $\varphi_z = 55^\circ 30' N$, $\lambda_z = 19^\circ 00' E$ wyznaczono wysokość rzeczywistą Słońca $h = 46^\circ 06,5'$. Wyznaczyć linię pozycyjną.

---◇◇◇---

Z rocznika astronomicznego odczytujemy deklinację Słońca i równanie czasu:

$$\delta = 21^\circ 36,1' \quad \Delta\alpha = -5^m 51^s$$

Obliczamy wysokość i azymut Słońca na pozycji zliczeniowej:

$$\begin{aligned}t &= T_\odot - 12^h = T_\odot + \Delta\alpha - 12^h = UT + \lambda_z + \Delta\alpha - 12^h = 20,9726^h = 314^\circ 35,3' \\ \sin h_z &= \sin \varphi_z \sin \delta + \cos \varphi_z \cos \delta \cos t = 0,672713 \\ h_z &= 42^\circ 16,6'\end{aligned}$$

$$\cos a = \frac{-\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t}{\cos h} = \frac{0,32936}{0,69330} = 0,47509 = \cos \pm 61,636^\circ;$$

ponieważ Słońce znajduje się na wschodniej stronie nieba weźmiemy $a = 360^\circ - 61,636^\circ = 298,364^\circ$, bądź azymut geodezyjny (liczony od kierunku północy): $180^\circ - 61,636^\circ = 118,364^\circ$.

Z pozycji zliczeniowej kreśli się kierunek obliczonego azymutu, a następnie, prostopadle do tego kierunku, linię pozycyjną. Ponieważ dostaliśmy $h < h_z$, linia pozycyjna leży dalej od punktu podslonecznego, niż wynikałoby ze zliczenia, o:

$$\Delta h = h_z - h = 42^\circ 16,6' - 42^\circ 06,5' = 10,1' = 10,1 \text{ Mm.}$$

Od tego miejsca należy prowadzić dalszą nawigację.

Przykład 5.7

W dniu 15 lipca 1979 r. z pozycji zliczonej $\lambda_z = 18^\circ 10,5' E$ zmierzono w czasie kulminacji wysokość dolnej krawędzi Słońca i obliczono rzeczywistą wysokość Słońca: $h_o = 55^\circ 27,4'$. Obliczyć szerokość geograficzną.

---◇◇◇---

Moment (UT) kulminacji Słońca na południku zerowym (z tablic): $12^h 06^m$ i na południku zliczeniowym (λ_z): $12^h 6^m - 1^h 14^m = 10^h 52^m$.

Z rocznika odczytujemy: $\delta_\odot = 21^\circ 34,9'$, tak więc $\varphi = 90^\circ - (h_o - \delta_\odot) = 56^\circ 07,5'$.

Przykład 5.8

O godzinie $UT_1 = 10^h 10^m 00^s$ zmierzono wysokość Słońca przed kulminacją. Tę samą wysokość osiągnęło Słońce po kulminacji o godzinie $UT_2 = 10^h 50^m 20^s$. Jaka była długość geograficzna, jeżeli z rocznika astronomicznego wiadomo, że w dniu obserwacji Słońce kulminowało na południku Greenwich o godzinie $UT_0 = 12^h 02^m 14^s$?

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Moment kulminacji na południku miejscowym: $UT = (UT_1 + UT_2)/2 = 10^h 30^m 10^s$. W chwili kulminacji w Greenwich różnicę czasu wynosiło $\Delta\alpha = 12^h - UT_0 = -2^m 14^s$. Jest zatem:

$$\lambda = 12^h - UT - \Delta\alpha = 12^h - 10^h 30^m 10^s + 2^m 14^s = 1^h 32^m 04^s.$$

Na kursach nawigacji proponuje się podejście prostsze:

$$\lambda = UT_0 - UT = 1^h 32^m 04^s = 23^\circ 01' \quad (\text{tj. } 23^\circ 01' \text{ długości wschodniej}).$$

Uwaga: Obydwa podejścia nie są równoważne, a dają takie same wyniki z powodu zaniedbania zmian równania czasu w ciągu doby. Mianowicie, jeśli przez $\dot{\alpha}$ oznaczymy szybkość zmiany (w sekundach na sekundę albo godzinach na godzinę UT), a przez $\Delta\alpha_0$ wartość równania o północy poprzedzającej obserwację to będziemy mieli:

$$\lambda = 12^h - UT - (\Delta\alpha_0 + \dot{\alpha} \cdot UT) = 12^h - UT(1 + \dot{\alpha}) - \Delta\alpha_0$$

albo (uogólnienie drugiego podejścia)

$$12^h - \Delta\alpha_0 = 12^h - (\Delta\alpha - UT_0 \cdot \dot{\alpha}) = UT_0 + UT \cdot \dot{\alpha}$$

$$\lambda = (UT_0 - UT_0)(1 + \dot{\alpha}).$$

Ponieważ $\dot{\alpha}$ jest zawsze małe ($< 0,00023$), to w praktyce nawigacyjnej dopuszczane jest zaniedbywanie tej wielkości.

Rozdział 6

Mechanika ruchów orbitalnych

(...) do powzięcia myśli o innej zasadzie obliczania ruchów sfer świata nie skłoniło mnie nic innego, jak tylko spostrzeżenie, że matematycy w swoich badaniach nad nimi są sami z sobą w sprzeczności. Przede wszystkim bowiem co do ruchu Słońca i Księżyca mają tyle wątpliwości, że nie potrafią nawet oznaczyć i obliczyć stałej wielkości roku zwrotnikowego.

[Kopernik (1987)]

6.1 Prawa Keplera

Prawa ruchu planet sformułowane przez J. Keplera w XVII w. brzmią:

I — Orbity planet są elipsami, w jednym z ognisk których znajduje się Słońce.

II — Pole zakreślone przez promień wodzący (od ogniska do planety) w jednostce czasu (prędkość polowa) jest stałe dla każdej planety.

III — Kwadraty okresów obiegu (\mathcal{P}) dwóch planet mają się do siebie w takim stosunku, jak sześciiany ich średnich promieni wodzących (wielkich półosi elips, a).

Prawa te dziś uzasadnia się teorią grawitacji (Newtona). Tak np., okazuje się, że w ogólności orbity mogą mieć kształt *krzywych stożkowych* (przekroje stożka płaszczyzną to: punkt, koło, elipsa, parabola, hiperbola lub prosta) a uogólnione III prawo Keplera można uzyskać z rozwiązania tzw. *zagadnienia dwóch ciał*:

$$\frac{a^3}{\mathcal{P}^2} = \frac{G}{4\pi^2}(\mathcal{M} + m), \quad (6.1)$$

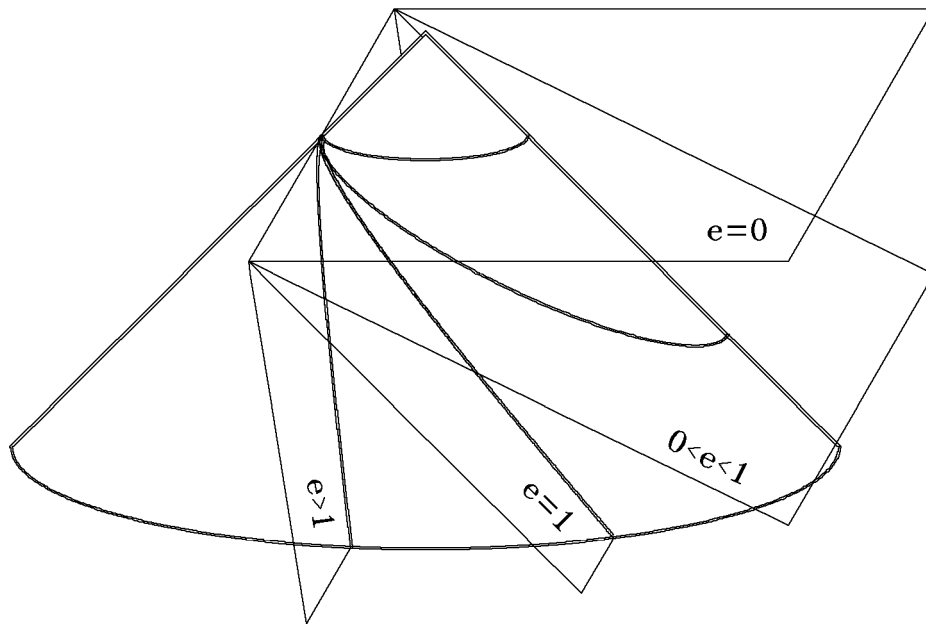
gdzie stała grawitacji $G = 2,959122083 \cdot 10^{-4} \text{AU}^3/(\mathcal{M}_\odot \text{d}^2)$, \mathcal{M}_\odot oznacza masę Słońca a ciało o masie m obiega ciało o większej masie \mathcal{M} (obie wyrażone w \mathcal{M}_\odot) w okresie \mathcal{P} (w d, tj. dobach) po orbicie eliptycznej o wielkiej półosi a (w AU, tj. jednostkach astronomicznych).

6.2 Krzywe stożkowe

Ogólną postać krzywej stożkowej można przedstawić wzorem:

$$y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2, \quad (6.2)$$

gdzie oś x jest osią symetrii (osią główną) zaś e nazywa się *mimośrodem* (też *ekscentrycznością*) krzywej i jest to stosunek odległości dowolnego punktu krzywej od *ogniska* i od pewnej prostej prostopadłej do x zwanej *kierownicą*.



Rys. 6.1 Orbity jako przekroje stożka płaszczyznami o różnych nachyleniach względem tworzącej stożka

Stożkowa jest elipsą, gdy $e < 1$ (w szczególności okręgiem przy $e = 0$), — parabolą, gdy $e = 1$, a hiperbolą dla większych wartości e . Ognisko znajduje się na osi x w miejscu $p/(1 + e)$, a kierownica jest od niego odległa o $\pm p/e$. Parametr p (*półparametr* lub *semilatus rectum*) jest odległością od ogniska do krzywej na kierunku prostopadłym do osi x ; dla elipsy i hiperboli $p = a(1 - e^2)$.

Równanie (6.2) we współrzędnych biegunowych (o początku w ognisku i współrzędnej kątowej, zwanej *anomalią prawdziwą* V , liczonej od osi x) przyjmuje prostszą postać:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V} \quad (6.3)$$

i można tą postać traktować jako uogólnione I prawo Keplera.

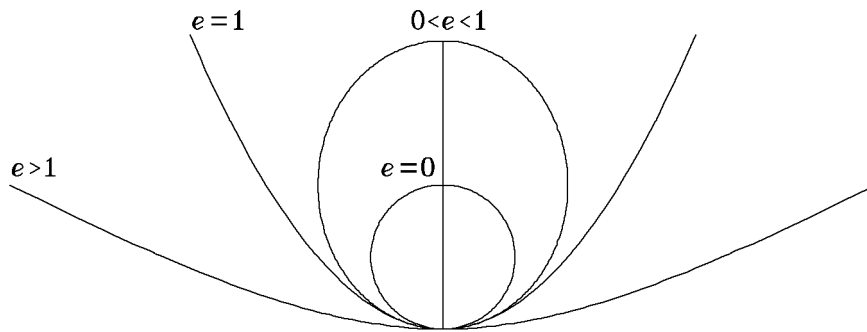
6.3 Prędkości na orbicie i prędkości kosmiczne

Liniowa prędkość ciała na orbicie wynika z II prawa Keplera, które można ująć wzorami:

$$r\dot{r} = r^2\dot{V} = 2C,$$

gdzie C jest prędkością połową a kropka nad symbolem oznacza szybkość zmiany wielkości stowarzyszonej z symbolem (pochodna po czasie). Szybkość zmiany anomalii prawdziwej (prędkość kątowna) wynosi

$$\dot{V} = \frac{\sqrt{G(\mathcal{M} + m)p}}{r^2} \quad (6.4)$$



Rys. 6.2 Kształt orbity w zależności od prędkości obiektu w perycentrum

Wyrażenie na prędkość liniową (nazywane niekiedy prawem *vis viva*) ma postać:

$$v^2 = G(\mathcal{M} + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (6.5)$$

gdzie dla orbit parabolicznych trzeba położyć $1/a = 0$, dla kołowych $r = a$ zaś orbity hiperboliczne mają $a < 0$. Zgodnie z tym wzorem (a także prawem pól p. 6.1) największa prędkość orbitalna przypada na *perycentrum* (punkt najbliższy do ogniska), gdzie energia kinetyczna ciała jest największa. Zwiększając prędkość ciała w perycentrum możemy spowodować jego ucieczkę z pola grawitacyjnego związanego z masą \mathcal{M} (przy prędkości *parabolicznej* lub *hiperbolicznej*). W przypadku elipsy w perycentrum $r = a(1 - e)$ (wzór (6.3), przy $V = 0^\circ$). Wobec tego mamy:

$$v_{max} = \sqrt{G(\mathcal{M} + m)} \sqrt{\frac{1 + e}{a(1 - e)}}, \quad (6.6)$$

a dla orbity kołowej o czynnik $\sqrt{(1 + e)/(1 - e)}$ mniej. Biorąc ten ostatni przypadek, orbitę kołową przy powierzchni Ziemi ($a = 6370$ km, $\mathcal{M} + m = \mathcal{M}_\odot/333000$), dostaje się *pierwszą prędkość kosmiczną*: ok. 7,9 km/s. Prędkość ucieczki z takiej orbity, czyli prędkość paraboliczna albo *druga prędkość kosmiczna*, jest o czynnik $\sqrt{2}$ większa (ok. 11,2 km/s). Prędkości kosmiczne *trzecia* i *czwarta* dotyczą prędkości wymaganej do

ucieczki ciała z Układu Słonecznego i Galaktyki i wynoszą (odpowiednio) 42,3 (o 29,8 mniej z orbity Ziemi w kierunku jej ruchu, jednak spoza pola grawitacyjnego Ziemi) i 350 km/s.

6.4 Orbita eliptyczna

6.4.1 Elipsa jako orbita planetarna

W przypadku elipsy (podobnie jest dla hiperboli) równanie (6.2) można przedstawić w postaci kanonicznej:

$$\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (6.7)$$

gdzie $a = p/(1 - e^2)$ jest wielką półosią elipsy, a $b = a\sqrt{1 - e^2}$ — półosią małą.

W odniesieniu do elipsy jako orbity używa się następującej terminologii:

- *perycentrum* (*periastron*, *perihelium*, *perygeum*, *peryselenium*) — punkt orbity najbliższy obiektu centralnego (gwiazdy, Słońca, Ziemi, Księżyca).
- *apocentrum* (*apoastron*, *aphelium*, *apogeum*, *aposelenium*) — najdalszy punkt orbity
- *linia apsyd* — linia łącząca perycentrum i apocentrum
- *anomalía prawdziwa*, V — kąt od perycentrum do planety widziany z ogniska (Słońca)
- *anomalía średnia*, M — kątowa odległość od perycentrum przy założeniu orbity kołowej: $M = 360^\circ \Delta t / \mathcal{P}$, gdzie Δt jest czasem liczonym od chwili przejścia przez perycentrum
- *anomalía mimośrodkowa* (*ekscentryczna*), E — otrzymuje się ją z anomalii średniej przez rozwiązanie równania Keplera (E i M w radianach):

$$\boxed{E - e \sin E = M} \quad (6.8)$$

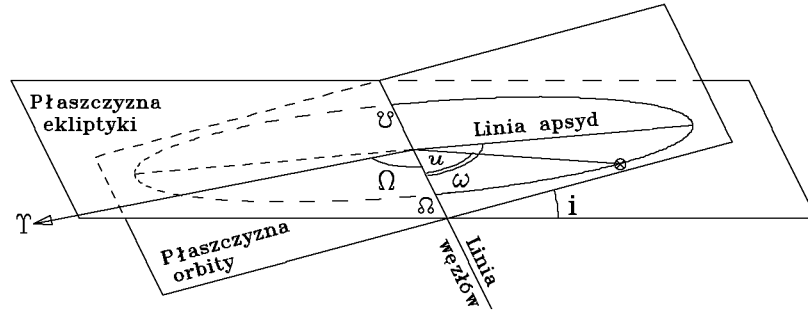
- *węzeł wstępujący/zstępujący* — punkt przecięcia się ekliptyki z orbitą, w którym ciało przechodzi ze strony południowej/północnej ekliptyki na przeciwną.

6.4.2 Elementy orbity

Orbity planet charakteryzuje się następującymi wielkościami:

- e — mimośród
- a — wielka półoś
- \mathcal{P} — okres obiegu, albo średni ruch: $n = 360^\circ / \mathcal{P} = \mathcal{M}$
- T_0 — moment przejścia przez perihelium
- ω — kąt między perihelium i węzłem wstępującym
- Ω — długość ekliptyczna węzła wstępującego
- i — kąt między płaszczyznami ekliptyki i orbity

Pierwsze cztery elementy są stałe dla orbity a pozostałe używa się do transformacji położenia obiektu do układu heliocentrycznego (dlatego ważne jest odnotowanie do jakiej ekliptyki się one odnoszą).



Rys. 6.3 Orientacja i niektóre elementy orbity eliptycznej

6.4.3 Obliczanie położenia ciała na orbicie

Znając czas T obliczamy najpierw anomalię średnią:

$$M = 2\pi \frac{T - T_0}{P}$$

i rozwiązujemy równanie Keplera otrzymując anomalię mimośrodową. W tym celu kładziemy $E_0 = M$ i obliczamy kolejne przybliżenia E_{i+1} . Możemy to uczynić np. tak (istnieje wiele innych podejść do tego zagadnienia):

$$E_{i+1} = E_i - \frac{M - E_i + e \sin E_i}{e \cos E_i - 1}$$

Proces iteracyjny kończymy, gdy $|E_{i+1} - E_i| < 0,0000001$ rad (co da dokładność na poziomie $0,05''$). Odległość od Słońca i anomalię prawdziwą dostajemy teraz ze wzorów:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (6.9)$$

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (6.10)$$

Heliocentryczne współrzędne ekliptyczne uzyskamy z transformacji:

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin(\sin u \sin i) \\ \lambda &= \Omega + \arctan \frac{\cos i \sin u}{\cos u} \end{aligned} \quad (6.11)$$

gdzie $u = \omega + V$ jest tzw. *argumentem szerokości* i gdzie, jak zwykle, bierzemy pod uwagę znaki licznika i mianownika przy obliczaniu funkcji \arctan .

Jeśli zamierzamy przejść z końcową pozycją do układu geocentrycznego, to potrzebne będą heliocentryczne współrzędne prostokątne :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \cos i \sin \Omega) \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos i \cos \Omega) \\ z &= r \sin \beta = r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (6.12)$$

od których odejmiemy heliocentryczne prostokątne współrzędne Ziemi:

$$\begin{aligned} X &= x - x_{\oplus} \\ Y &= y - y_{\oplus} \\ Z &= z - z_{\oplus} \end{aligned} \quad (6.13)$$

W podobny sposób przechodzimy z heliocentrycznych współrzędnych równikowych na geocentryczne (w powyższych transformatach należy jedynie zamienić λ na α , a β na δ).

6.5 Orbity paraboliczna i hiperboliczna

Tylko dla orbity **parabolicznej** znana jest bezpośrednia zależność anomalii prawdziwej od czasu (*równanie Barkera*):

$$\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{G(\mathcal{M} + m)}{2q^3}} (T - T_0), \quad (6.14)$$

gdzie q jest odległością perycentrum. Ponadto równanie to ma analityczne rozwiązanie dla V :

$$\tan \frac{V}{2} = B - \frac{1}{B},$$

gdzie $B = \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + 1} + A}$ zaś $A = 3 \cdot \sqrt{G(\mathcal{M} + m)/(2q)^3} (T - T_0)$.

Jeśli znamy anomalię prawdziwą, to odległość od ciała centralnego i współrzędne prostokątne obliczymy za pomocą następujących zależności:

$$\begin{aligned} r &= \frac{2q}{1 + \cos V} = q \left(1 + \tan^2 \frac{V}{2}\right) \\ r \cos V &= q \left(1 - \tan^2 \frac{V}{2}\right), & r \sin V &= 2q \tan \frac{V}{2} \end{aligned}$$

Dla ruchu po **hiperboli** wprowadza się pomocniczą wielkość, F lub H , analogiczną do anomalii mimośrodowej, dla której zachodzi:

$$e \tan F - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2}\right) = -H + e \sinh H = \sqrt{\frac{G(\mathcal{M} + m)}{|a|^3}} (T - T_0) \equiv M_h,$$

gdzie a (ujemne) jest wielką półosią. Jedno z powyższych równań trzeba rozwiązać metodą iteracyjną. Podobnie jak w przypadku orbity eliptycznej możemy położyć $H_0 = M_h$ i kolejne przybliżenia na H otrzymywać ze wzoru:

$$H_{i+1} = H_i - \frac{e \sinh H_i - H_i - M_h}{e \cosh H_i - 1}$$

zatrzymując się przy $|H_{i+1} - H_i| < 10^{-7}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \tan \frac{V}{2} &= \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tan \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{H}{2} \\ r &= \frac{|a|(e^2 - 1)}{1 + e \cos V} = |a|(e \cosh H - 1). \end{aligned}$$

Kładąc teraz $u = V + \omega$ możemy przejść na współrzędne ekliptyczne i ewentualnie geocentryczne za pomocą przekształceń (6.11), (6.12) i (6.13).

6.6 Wyznaczanie elementów orbity z wektorów położenia i prędkości

W przypadku niezaburzonego ruchu w zagadnieniu dwóch ciał wektory względnego położenia $\vec{r}(x, y, z)$ i prędkości $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ wzięte w dowolnej chwili jednoznacznie określają rozmiary, kształt i orientację orbity (wyjąwszy raczej trywialne przypadki ruchu po prostej lub zerowych wektorów). Płaszczyzną orbity jest ta, która zawiera oba wektory (\vec{r}, \vec{v}) a określa ją jednoznacznie wektor prędkości polowej:

$$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{v} = (y\dot{z} - z\dot{y}, z\dot{x} - x\dot{z}, x\dot{y} - y\dot{x})$$

o długości

$$C = \sqrt{(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2}. \quad (6.15)$$

Nachylenie tej płaszczyzny do płaszczyzny odniesienia (x,y) wynosi:

$$i = \arccos \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{C} \quad (6.16)$$

a długość węzła wstępującego:

$$\Omega = \arctan \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{-z\dot{x} + x\dot{z}} \quad (6.17)$$

(przy wyznaczaniu Ω trzeba wybrać ćwiartkę stosownie do znaków licznika i mianownika w powyższym wzorze!; patrz p. 2.3.4; to samo dotyczy wzoru (6.18)).

Argument szerokości (kąt od węzła do obiektu) obliczamy z

$$u = \arctan \frac{z}{\sin i (x \cos \Omega + y \sin \Omega)}. \quad (6.18)$$

Kształt orbity określimy ze wzoru

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{G(\mathcal{M} + m)}; \quad (6.19)$$

mianowicie, jeśli wartość $1/a$ jest większa od zera, to jest to elipsa, przy $1/a = 0$ mamy parabolę, zaś dla orbit hiperbolicznych $1/a < 0$. Możemy teraz wybrać odpowiedni do typu orbity parametr (q jest odległością perycentrum):

$$p = \frac{C^2}{G(\mathcal{M} + m)} \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad q = \frac{p}{1 + e} \quad (6.20)$$

Od tego miejsca problem musimy rozwiązywać w sposób zależny od typu orbity. Dotyczy to obliczenia długości perycentrum i czasu przejścia przez ten punkt orbity.

Dla orbit **eliptycznych** mamy

$$\tan E = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{aG(\mathcal{M} + m)} \left(1 - \frac{r}{a}\right)} \quad \tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (6.21)$$

a stąd kąt od perycentrum do węzła wstępującego (ω) i długość perycentrum (ϖ):

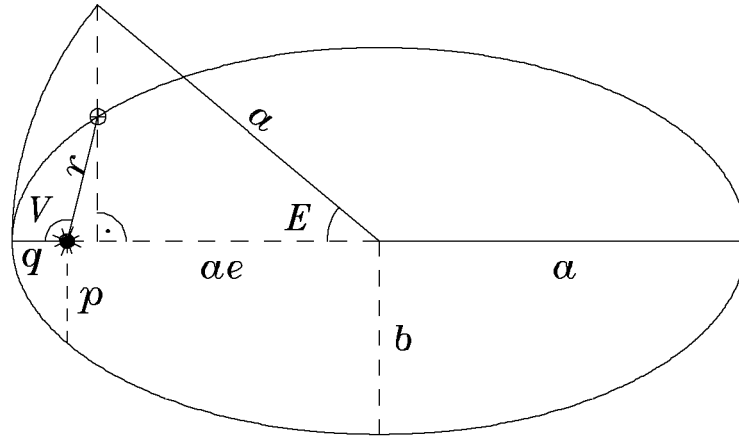
$$\omega = u - V \quad \varpi = \omega + \Omega \quad (6.22)$$

oraz moment przejścia przez perycentrum:

$$T_o = T - \frac{M}{n} \equiv T - \sqrt{\frac{a^3}{G(\mathcal{M} + m)}}(E - e \sin E), \quad (6.23)$$

gdzie anomalia średnia wynosi $M = E - e \sin E$, a średni ruch (tutaj w radianach na dobę)

$$n = \sqrt{G(\mathcal{M} + m)/a^3}.$$



Rys. 6.4 Orbita eliptyczna. Pokazano geometryczną interpretację anomalii mimośrodowej E

Dla orbity **parabolicznej** jest

$$\tan \frac{V}{2} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{2qG(\mathcal{M} + m)}} \quad (6.24)$$

oraz

$$T_o = T - \sqrt{\frac{2q^3}{G(\mathcal{M} + m)}} \left(\frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} + \tan \frac{V}{2} \right) \quad (6.25)$$

zaś dla **hiperbolicznej**

$$\tanh H = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{|a|G(\mathcal{M} + m)} \left(1 - \frac{r}{a}\right)} \quad \tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{H}{2} \quad (6.26)$$

oraz

$$T_o = T - \sqrt{\frac{|a|^3}{G(\mathcal{M} + m)}} (e \sinh H - H). \quad (6.27)$$

Dla obu ostatnich orbit ω i ϖ obliczamy tak, jak dla elipsy, tj. wg. wzorów (6.22).

6.7 Orbity rzeczywiste (planetarne) i okresy orbitalne dla ruchów zaburzonych

W rzeczywistości nigdy nie mamy do czynienia z czysto keplerowskimi orbitami, gdyż nie istnieją izolowane układy podwójne. W praktyce jednak przybliżenie takie jest często zadowalające, a na ogół przynajmniej może służyć jako pierwsze przybliżenie, do którego dodaje się funkcje *perturbacyjne*. Termin *orbita oskulacyjna* dotyczy orbity keplerowskiej stycznej w podanej chwili do orbity rzeczywistej. Zmienne elementy orbit planet podaje się w funkcji czasu w postaci szeregów potęgowych niskiego (2, 3 lub wyższego) stopnia w układzie ekliptycznym. Pojawia się wtedy dodatkowo problem wieloznaczności pojęcia okresu obiegu Słońca (albo Ziemi w przypadku orbity Księżyca), z którym niekiedy nawet specjaliści miewają trudności (Borkowski 1991).

Średnia długość ekliptyczna ciała na orbicie zawiera informacje o okresach obiegu i chwili przejścia przez punkt Barana. Ma ona postać:

$$L = M + \varpi = L_0 + aT + bT^2 + cT^3 + \dots \tag{6.28}$$

gdzie T jest czasem liczonym zwykle w stuleciach juliańskich od epoki standardowej, a współczynniki a , b , c i ewentualnie dalsze podaje się w stopniach lub sekundach łuku. Z długości ekliptycznych (6.28) można łatwo obliczyć kilka różnych okresów (lat w przypadku Ziemi, a miesięcy dla Księżyca).

Elementy orbit niektórych planet (przybliżenia liniowe)

Z wyjątkiem a (AU) i e (bezwymiarowe) wszystkie elementy podano w stopniach. T jest czasem jaki upłynął od J2000 w stuleciach juliańskich; $\varpi = \omega + \Omega$ (wg.: Montenbruck 1989; por. też rozdz. 7)

Planeta	a [AU]	e	i	Ω	ϖ	M	$L = M + \varpi$
Merkury	0,387099	0,205634+	7,0048+	48,331+	77,4552+	174,7947+	252,2499+
		0,000020T	0,0019T	1,185T	1,5555T	149472,5153T	149474,0708T
Wenus	0,723332	0,006773-	3,3946+	76,680+	131,5718+	50,4071+	181,9790+
		0,000048T	0,0010T	0,900T	1,4080T	58517,8039T	58519,2119T
Ziemia	1,000000	0,016709-	0,0	(0) nieo- kreślone	102,9400+	357,5256+	100,4656+
		0,000042T			1,7192T	35999,0498T	36000,7690T
Mars	1,523692	0,093405+	1,8496-	49,557+	336,0590+	19,3879+	355,4469+
		0,000092T	0,0007T	0,771T	1,8408T	19139,8585T	19141,6993T

Okres (*rok, miesiąc zwrotnikowy*) dotyczy odstępów czasu pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami ciała przez punkt równonocy wiosennej (Barana):

$$\mathcal{P}_t = \frac{360^\circ}{\dot{L}} = \frac{360^\circ}{a + 2bT + 3cT^2 + \dots} \approx \frac{360^\circ}{a} \left(1 - 2\frac{b}{a}T - 3\frac{c}{a}T^2 - \dots \right), \tag{6.29}$$

gdzie \dot{L} oznacza pochodną po czasie (T) z L , zaś 360° umieściliśmy w liczniku przy założeniu, że a , b , c , ... wyrażono w stopniach; jeśli współczynniki te dane są w sekundach

łuku, wtedy w liczniku piszemy $360 \cdot 3600''$ — tak, jak w przykładzie przy końcu tego punktu.

Okresem *synodycznym* (od złączenia w długości do następnego złączenia) dwóch obiektów o średnich długościach ekliptycznych L_1 i L_2 (np. planety lub Księżycy i Słońca) będzie:

$$\mathcal{P}_s = \frac{360^\circ}{\dot{L}_2 - \dot{L}_1} = \frac{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}. \quad (6.30)$$

Okres (*rok, miesiąc*) *anomalistyczny* obejmuje czas pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami obiektu przez perycentum:

$$\mathcal{P}_a = \frac{360^\circ}{\dot{M}} = \frac{360^\circ}{\dot{L} - \dot{\varpi}} = \frac{360^\circ}{\dot{L} - \dot{\omega} - \dot{\Omega}}. \quad (6.31)$$

Okres (*rok, miesiąc*) *gwiazdowy* albo *syderyczny* dotyczy ruchu względem układu inercjalnego (odległych gwiazd albo kwazarów) i mierzy się czasem dwóch kolejnych przejść obiektu przez ten sam punkt ekliptyki (np. punkt Barana) z danej jednej epoki (tj. bez precesji):

$$\mathcal{P}_\star = \frac{360^\circ}{\dot{L} - p_A}, \quad (6.32)$$

gdzie

$$p_A = 5029,0966''T + 1,11161''T^2 - 0,000113''T^3$$

jest tzw. *ogólną precesją w długości* (Lieske i in. 1977, *Improved IAU System* 1983), a $T = (JD - 2451545)/36525$ (oczywiście \dot{L} musi być tutaj wyrażone także w funkcji T).

W literaturze możemy spotkać się także z terminami *rok zaćmieniowy* lub *miesiąc smoczy*, które oznaczają średni okres pomiędzy kolejnymi przejściami Słońca lub Księżycy przez węzeł wstępujący orbity Księżycy:

$$\mathcal{P}_e = \frac{360^\circ}{\dot{L} - \dot{\Omega}_K}, \quad (6.33)$$

gdzie $\dot{\Omega}_K$ jest pochodną po czasie ze średniej długości węzła Księżycy, a \dot{L} — pochodną średniej długości Słońca (dla roku zaćmieniowego) lub Księżycy (miesiąc smoczy).

Dla przykładu obliczymy wyrażenie na długość roku zwrotnikowego, którego Peck (1990) bezskutecznie poszukiwał w literaturze. Okres ten ma szczególne znaczenie ze względu na konstrukcje zależnych od niego kalendarzy słonecznych. Według współczesnej teorii ruchu Ziemi Bretagnona (1982) średnia długość ekliptyczna Słońca wyraża się przez

$$L_{\odot} = 280^\circ 27' 59,215'' + 129602771,36329''T + 1,093241''T^2 + 0,0000762''T^3 \quad (6.34)$$

Długość roku zwrotnikowego w wiekach juliańskich wyniesie zatem

$$\mathcal{P}_t = \frac{360 \cdot 3600}{129602771,36329 + 2 \cdot 1,093241 \cdot T + 3 \cdot 0,0000762 \cdot T^2},$$

gdzie czynnik 3600 zamienia jednostki współczynników L_{\odot} z sekund łuku na stopnie. Mnożąc to wyrażenie przez 36525 (w celu zamiany wyniku z wieków juliańskich na doby) i upraszczając współczynniki liczbowe dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t &= \frac{36525 \cdot 360 \cdot 3600}{129602771,36329 + 2,186482 \cdot T + 0,0002286 \cdot T^2} \\ &\approx 365,242189669781 - 6,161870 \cdot 10^{-6} \cdot T - 6,44 \cdot 10^{-10} \cdot T^2 \quad (6.35) \\ &= 365,242195831007 - 6,160582 \cdot 10^{-6} \cdot T' - 6,44 \cdot 10^{-10} \cdot T'^2, \end{aligned}$$

gdzie $T' = T + 1$ liczone jest od epoki J1900. Przybliżenie (6.35) jest bardzo dokładne (w przedziale 10 000 lat wynikający stąd błąd długości roku nie przekracza 0,0001 sekundy czasu). Otrzymany wynik można porównać ze wzorem Newcomba (opartym na jego teorii ruchu Ziemi, a w szczególności na wyrażeniu na średnią długość Słońca) cytowanym powszechnie w podręcznikach:

$$\mathcal{P}_{tN} = 365,24219879 - 6,14 \cdot 10^{-6} \cdot T' = 365,24219265 - 6,14 \cdot 10^{-6} \cdot T.$$

Wynik taki dostalibyśmy przyjmując za Newcombem na średnią długość Słońca

$$L_{\odot N} = 279^\circ 41' 48,04'' + 129602768,13''T' + 1,089''T'^2.$$

Zauważamy, że te dwie długości roku zwrotnikowego współcześnie różnią się o 0,26 s przy porównywalnych zmianach wiekowych (skracanie roku o $0,00000616^d = 0,53^s$ na wiek).

Długości miesięcy (dla epoki J2000) i lat [d]

Okres	Miesiąc	Rok
zwrotnikowy (p. Barana – p. Barana)	27,32158224	$365,24218967 - 6,16 \cdot 10^{-6}T$
gwiazdowy (gwiazda – gwiazda)	27,32166155	$365,25636305 + 1,04 \cdot 10^{-7}T$
anomalistyczny (perygeum – perygeum)	27,55454988	$365,25963591 + 3,17 \cdot 10^{-6}T$
smoczy/zaćmieniowy (węzeł – węzeł)	27,21222082	$346,62007591 + 3,24 \cdot 10^{-5}T$
synodyczny (nów – nów)	29,53058885	

T jest liczone w wiekach juliańskich od J2000. Wyniki te otrzymaliśmy z elementów średnich teorii Bretagnona (1982) oraz Chapront–Touzé i Chapront (1988). Zmiany długości miesięcy są bardzo powolne. Najszybsza zmiana (skracanie miesiąca anomalistycznego) wynosi $1,04 \cdot 10^{-6}$ d/cy, tj. mniej niż 0,1 sekundy na wiek.

6.8 Przykłady

Przykład 6.1

Obliczyć na jakiej wysokości nad równikiem powinien znajdować się satelita aby obiegał Ziemię z okresem równym dobie gwiazdowej.

- - - ◇◇ - - -

Korzystamy wprost z III prawa Keplera (równanie (6.1)) zaniedbując masę satelity ($\mathcal{P} = 1^d/1,0027379$):

$$a^3 = \left(\frac{\mathcal{P}}{2\pi}\right)^2 G\mathcal{M}_{\oplus} = \frac{2,959122083 \cdot 10^{-4} \cdot 1/332946}{(1,0027379 \cdot 2\pi)^2} = 2,23899 \cdot 10^{-11} \text{ AU}^3,$$

po wyciągnięciu pierwiastka sześciennego i przeliczeniu jednostek dostajemy ostatecznie $a = 42164171 \text{ m} = 6378140 \text{ m} + 35786031 \text{ m}$, co oznacza, że satelita geostacjonarny powinien być umieszczony na wysokości ok. 35,8 tys. km.

Przykład 6.2

Znaleźć prawdziwą anomalię i odległość Jowisza od Słońca dnia 25.03.1982 r. o godz. 0 UT (JD2445053,5) przyjmując $a = 5,204491 \text{ AU}$, $e = 0,047837$, $M = 199,7855^\circ$.

--- ◇◇◇ ---

Kolejne iteracje rozwiązywania równania Keplera dają (p. 6.4.3):

$$E_0 = 199,785500^\circ$$

$$E_1 = 198,897683^\circ$$

$$E_{i>1} = 198,897788^\circ$$

stąd (wzory (6.9) i (6.10))

$$r = 5,440038 \text{ AU} \quad V = 198,0293^\circ$$

Przykład 6.3

Obliczyć najmniejszą i największą prędkość kątową Słońca w ruchu po ekliptyce ($a = 1 \text{ AU}$, $e = 0,0167$, $m \approx 0$).

--- ◇◇◇ ---

Obliczymy najpierw skrajne wartości promienia wodzącego podstawiając $V = 0$ i $V = 180^\circ$ do wzoru (6.2), a następnie zastosujemy wzór (6.4)

$$r_{max} = a(1 + e) = 1,0167 \text{ AU} \quad r_{min} = a(1 - e) = 0,9833 \text{ AU}$$

$$p = a(1 - e^2) = 0,9997 \text{ AU}$$

$$\dot{V}_{max} = 0,01779 \text{ rad/d} = 1,02 \text{ }^\circ/\text{d} \quad \dot{V}_{min} = 0,01664 \text{ rad/d} = 0,95 \text{ }^\circ/\text{d}$$

zatem Słońce przemieszcza się o $0,07^\circ$ dziennie więcej zimą (w peryhelium) niż latem.

Przykład 6.4

Znaleźć minimalną i maksymalną prędkość Ziemi na orbicie wokół Słońca (dane z przykł. 6.3).

--- ◇◇◇ ---

Wstępnie postępujemy podobnie jak w przykładzie 6.3 po czym stosujemy wzór (6.5)

$$G(\mathcal{M} + m) \approx 2,959122 \cdot 10^{-4} \text{ AU}^3/\text{d}^2$$

$$v_{max}^2 = 0,000306 \text{ (AU/d)}^2$$

$$v_{min}^2 = 0,000286 \text{ (AU/d)}^2$$

$$v_{max} = 0,0175 \text{ AU/d} = 30,3 \text{ km/s}$$

$$v_{min} = 0,0169 \text{ AU/d} = 29,3 \text{ km/s}$$

Przykład 6.5

Znaleźć prawdziwą anomalię i odległość od Słońca do komety Kohoutek w dniu 1 lutego 1974 r. o godz. 0 UT (JD2442079,5) znając następujące jej elementy orbitalne:

$$T_0 = \text{JD}2442044,931 \text{ (1973.XII.28,431)} \quad e = 1 \quad q = 0,142425 \text{ AU}$$

--- ◇◇◇ ---

Rozwiązujemy równanie Barkera (p. 6.5):

$$T = T_0 + 34,569^d$$

biorąc $m = 0$ dostaje się kolejno:

$$A = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a(\mathcal{M} + m)}{2q^3}} \cdot (T - T_0) = 11,734516$$

$$\begin{aligned}\tan \frac{V}{2} &= 2,515732 \\ V &= 136,6445^\circ \\ r &= q \left[1 + \tan^2 \left(\frac{V}{2} \right) \right] = 1,043820 \text{ AU.}\end{aligned}$$

Przykład 6.6

Chcemy umieścić satelitę na orbicie kołowej na wysokości $H = 30\,000$ km nad Ziemią. Zaniedbując opór powietrza, dobową rotację Ziemi i jej spłaszczenie obliczyć kierunek i prędkość początkową wystrzelenia sputnika z powierzchni Ziemi (o promieniu $R = 6371$ km) wymaganą do osiągnięcia apogeum na wysokości H w odległości 5000 km od miejsca startu. Ocenić czas trwania lotu do apogeum i impuls (przyrost prędkości) potrzebny do zmiany aktualnej orbity na kołową.

- - - - ◇◇ - - - -

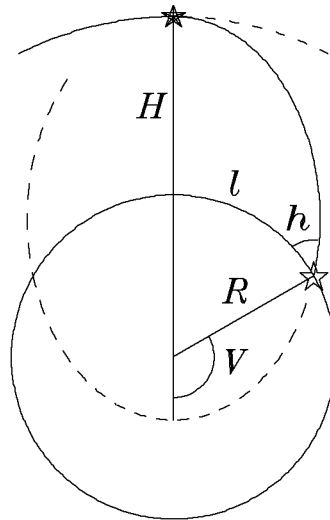
Podobny przykład podaje Bertiau (1977) wraz z rozwiązaniem zawierającym, niestety, błędy. Oto nasze rozwiązanie.

Z warunków problemu znajdujemy natychmiast anomalię prawdziwą w chwili startu rakiety:

$$V = \pi - \frac{l}{R} = 135,034^\circ$$

oraz mimośród orbity: ponieważ (wzór (6.3)) $R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos V} = \frac{a(1 + e)(1 - e)}{1 + e \cos V} = \frac{(R + H)(1 - e)}{1 + e \cos V}$, to

$$e = \frac{H}{R + H + R \cos V} = 0,94152$$



Rys. 6.5 Ilustracja do przykładu 6.6

Z geometrii problemu wynika, że $2a = H + R + a(1 - e)$, czyli

$$a = \frac{H + R}{1 + e} = 18733,257 \text{ km.}$$

W celu obliczenia kąta między kierunkiem stycznym do orbity a płaszczyzną horyzontu, h , zróżniczkujemy wzór (6.3) względem anomalii prawdziwej: $dr/dV = re \sin V/(1 + e \cos V) = Re \sin V/(1 + e \cos V)$ i podzielimy przez pochodną odległości po anomalii prawdziwej: $dl/dV = R$: $\tan h = dr/dl = e \sin V/(1 + e \cos V)$. Mamy więc

$$h = \arctan \frac{e \sin V}{1 + e \cos V} = 63,3544^\circ.$$

Inne równoważne wyrażenie można uzyskać z analizy geometrii elipsy bez uciekania się do rachunku różniczkowego:

$$h = V - \arctan \frac{\sin V}{\left(\frac{ae}{R} + \cos V\right)(1 - e^2)} = 63,3544^\circ.$$

Okres orbitalny obliczamy ze wzoru (6.1) przyjmując $m = 0$:

$$\mathcal{P} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_\oplus}} = 1,15185 \cdot 10^{-7} a \sqrt{a} \text{ [d]} = 0,295336^d,$$

gdzie, aby otrzymać \mathcal{P} w dobach, a należy wyrazić w km. Czas lotu do apogeum, $t = \mathcal{P}/2 - M/n = \mathcal{P}/2 - M/(2\pi/\mathcal{P})$ znajdziemy za pośrednictwem anomalii mimośrodowej. Ze wzoru (6.9) mamy:

$$E = \arccos \frac{a - R}{ae} = \arccos \frac{H + R \cos V}{H + R} = 45,5009^\circ.$$

Ponieważ $\mathcal{M} = E - e \sin E$, to ostatecznie:

$$t = \frac{\mathcal{P}}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi}(E - e \sin E) \right] = 0,141906^d.$$

Prędkość początkowa wynosi (z (6.5)):

$$v_o = \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right)} = 2\pi \frac{a}{\mathcal{P}} \sqrt{2\frac{a}{R} - 1} = 10,19081 \text{ km/s.}$$

Prędkość w apogeum:

$$v_a = \sqrt{GM_\oplus \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right]} = 2\pi \frac{a}{\mathcal{P}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 0,80056 \text{ km/s}$$

Prędkość kołowa w apogeum [$e_c = 0$, $a_c = R + H$, $\mathcal{P}_c = 1,15185 \cdot 10^{-7}(R + H)^{3/2}$]:

$$v_c = 2\pi \frac{a_c}{\mathcal{P}_c} = \frac{v_a}{\sqrt{1-e}} = 3,31049 \text{ km/s.}$$

Zatem impuls wymagany do zmiany orbity wynosi $v_c - v_a = 2,5 \text{ km/s}$.

Rozdział 7

Efemerydy

Przez efemerydę rozumie się dane liczbowe dotyczące przebiegu przyszłego zjawiska astronomicznego, np. współrzędne planety, momenty zaćmienia, moment minimum blasku gwiazdy zmiennej itp. Podstawę obliczania efemerydy stanowią elementy orbity ciała niebieskiego lub inne charakterystyki liczbowe danego zjawiska pozwalające przewidywać jego przebieg.

Do obliczeń położenia ciał Układu Słonecznego służą teorie dynamiczne wypracowane w mechanice nieba i nawiązane do systematycznych obserwacji. Położenia gwiazd wyznacza się na podstawie wieloletnich obserwacji ich współrzędnych i niewielkich, zatem na ogół nie wymagających skomplikowanych teorii, ruchów przestrzennych. Obliczona pozycja najczęściej jest geometryczną i musi być przetransformowana do układu zależnego od przeznaczenia efemerydy; zwykle jest to układ geocentryczny uwzględniający wpływ położenia i ruchu Ziemi wokół Słońca na obserwowane położenie (efekt paralaksy i aberracji) oraz zmiany układów współrzędnych (precesja i nutacja). Do zastosowań praktycznych trzeba dodatkowo uwzględnić jeszcze efekty związane z położeniem i ruchem obserwatora względem układu, w którym podano efemerydę ciała. Obok przekształceń współrzędnych trzeba też wykonać odpowiednie transformacje czasu. Np., pozycja geometryczna planety uzyskana z modelu dynamicznego obliczana jest w funkcji czasu *dynamicznego*, który należy zamienić na *uniwersalny* lub inny, w zależności od potrzeb.

Gotowe efemerydy na zadany rok podawane są w rocznikach astronomicznych.

7.1 Katalogi gwiazd (FK5) i roczniki astronomiczne

Klasyczne wyznaczenia astrometrii i astronomii geodezyjnej opierają się na wcześniej wyznaczonych dokładnych współrzędnych gwiazd, które publikowane są w rocznikach astronomicznych. Normalnie, takie roczniki konstruuje się na podstawie międzynarodowo uzgodnionego systemu stałych, układów odniesienia i *fundamentalnych katalogów (FK)* gwiazd. Obecnie obowiązują ustalenia z lat 1974 – 1984. Ten najnowszy system zawiera znaczną liczbę zmian w stosunku do poprzedniego, chociaż są to na ogół zmiany bardzo subtelne lub wręcz „kosmetyczne”. Mają one pierwszorzędne znaczenie głównie przy pomiarach o bardzo wysokiej precyzji, jaką zapewniają najnowsze techniki obserwacji (VLBI, SLR i LLR) wykorzystujące obserwacje radioźródeł pozagalaktycznych, sztucznych satelitów Ziemi oraz obserwacje Księżyca. Układ odniesienia dla tych precy-

zyjnych pomiarów został przywiązywany do wspomnianego, mniej dokładnego, klasycznego systemu astronomii optycznej opierającego się na gwiazdach Galaktyki jak również planetach Układu Słonecznego.

Najnowszy z historycznej już serii katalogów fundamentalnych, *Fifth Fundamental Catalogue (FK5)*, część I: *The Basic Fundamental Stars* (Fricke i in. 1988) zawiera spis 1535 gwiazd całego nieba (te same, co w poprzednich katalogach FK3 i FK4) (w części II znajdują się nowe gwiazdy fundamentalne o mniejszej jasności i gorzej wyznaczonej pozycji). Jest to staranna kompilacja 85 indywidualnych katalogów opracowanych przez różne obserwatoria i instytucje w latach 1900 – 1980. W spisie tym podano współrzędne równikowe (tj. miejsca średnie) oraz ruchy własne każdej gwiazdy dla dwóch epok: J2000.0 i B1950.0.

Niektóre obserwatoria astronomiczne publikują corocznie kalendarze astronomiczne, zwane rocznikami. Zwykle jest to rocznik krajowy, przygotowany w języku i pod kątem potrzeb danego państwa. Zawiera on z reguły podstawowe informacje o aktualnych stałych i definicjach związanych z rachubą czasu, efemerydy (widome pozycje) ciał Układu Słonecznego oraz pewnej liczby gwiazd fundamentalnych jak również m.in. momenty wschodów, zachodów, świtów, zmierzchów, górowań niektórych ciał dla wybranych miejsc. W Polsce takim kalendarzem jest *Rocznik Astronomiczny* opracowywany przez Obserwatorium Astronomiczno-Geodezyjne Instytutu Geodezji i Kartografii w Warszawie.

Aktualne dla danego roku (widome geocentryczne) położenia wszystkich gwiazd FK5 zawiera coroczna publikacja *Apparent Places of Fundamental Stars* (Wielen i in. 1988), która nie jest typowym rocznikiem.

Do podstawowych roczników astronomicznych (na których bazują wydania krajowe lub lokalne) zaliczają się:

- *Astronomical Almanac* wydawany przez U.S. Naval Observatory (Waszyngton, USA) oraz Royal Greenwich Observatory (Londyn, W. Brytania); do 1980 r. nazywał się *American Ephemeris and Nautical Almanac*
- *Astronomicheskij Ezhegodnik SSSR* — Instytut Teoretycznej Astronomii AN SSSR (Leningrad, ZSRR)
- *Connaissance des Temps* — Bureau des Longitudes (Paryż, Francja).

7.2 Efemeryda Gwiazdy Biegunowej

Ze względu na bliskość północnego bieguna nieba Gwiazda Polarna (Polaris, Cynozura albo α Ursae Minoris — najjaśniejsza gwiazda Małej Niedźwiedzicy) jest wygodnym obiektem do dokładnych wyznaczeń współrzędnych geograficznych i azymutu. Z powodu precesji i znacznego ruchu własnego tej gwiazdy jej średnie położenie (wolne od aberracji i nutacji) dość szybko ulega zmianom. Roczniki astronomiczne zawierają aktualne położenia Polaris lecz można je obliczyć także bez tej pomocy.

Bez uwzględniania precesji, w chwili $T = (JD - 2451545)/36525$, współrzędne równikowe Polaris są następujące:

$$\begin{aligned}\alpha_o &= 2^h 31^m 48,704^s + 19,877^s T \\ \delta_o &= 89^\circ 15' 50,72'' - 1,52'' T,\end{aligned}\tag{7.1}$$

gdzie lewe składniki prawych stron są średnimi współrzędnymi dla epoki J2000 (tj. 1.I.2000 r.) a prawe wynikają z wiekowego ruchu własnego.

W celu obliczenia średniego miejsca Gwiazdy Biegunowej wyznaczamy najpierw kąty precesyjne ζ_A , z_A i θ_A (p. 2.4.5), a dalej już tylko:

$$\begin{aligned}\delta &= \arcsin[\cos\theta_A \sin\delta_o + \sin\theta_A \cos\delta_o \cos(\alpha_o + \zeta_A)] \\ &\approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\theta_A^2 + (\frac{\pi}{2} - \delta_o)[\frac{\pi}{2} - \delta_o - 2\theta_A \cos(\alpha_o + \zeta_A)]} \\ \alpha &= z_A + \arcsin \frac{\cos\delta_o \sin(\alpha_o + \zeta_A)}{\cos\delta}\end{aligned}\quad (7.2)$$

Wypada ostrzec, że wzór na α jest dobry tylko dla gwiazd, których rektascensja mieści się w pierwszej ćwiartce, a przybliżenie dla δ (w którym kąty trzeba wyrazić w radianach) stosuje się tylko do gwiazd okołobiegunowych. Np., dla epoki B1950.0 (JD2433282,4235; $T = -0,5000021$) dostaje się z powyższego algorytmu

$$\alpha_{1950} = 1^h 48^m 48,293^s \quad \delta_{1950} = 89^\circ 01' 43,44''$$

co się dobrze (z dokładnością $0,001^s$) zgadza z danymi w katalogu FK5 (Fricke i in. 1988).

Aby uzyskać miejsca *widome* trzeba do katalogowych (albo obliczonych) miejsc średnich dodać poprawki wynikające z aberracji światła (p. 2.4.7) i nutacji osi rotacji Ziemi wokół bieguna niebieskiego (p. 2.4.6).

7.3 Układ Słońce–Ziemia

7.3.1 Orbita Ziemi a klimat

W pierwszym przybliżeniu orbitę Ziemi wokół Słońca możemy traktować jako eliptyczną o wolnozmiennych parametrach elipsy. Popelniamy przy tym błędy rzędu minuty łuku. Ruch Ziemi w praktyce objawia się jako pozorny ruch Słońca na ekliptyce, stąd często mówimy o parametrach orbity Słońca, rozumiejąc przez to widomą drogę Słońca na tle gwiazd. W istocie, w zagadnieniu dwóch ciał oba ciała obiegają wspólny środek masy po podobnych orbitach (te same mimośrodowo) lecz o rozmiarach odwrotnie proporcjonalnych do mas ciał, ale w układzie Słońce–Ziemia rzeczywisty ruch Słońca możemy zaniedbać, zwłaszcza w kontekście istnienia innych planet. Współrzędne Słońca (\odot) i Ziemi (\oplus) wiążą zależności:

$$\lambda_{\odot} = \lambda_{\oplus} \pm 180^\circ \quad \beta_{\odot} = -\beta_{\oplus}.$$

Oto średnie parametry orbity Ziemi ważne w kilku tysiącach lat wokół epoki standardowej (J2000) a zaczerpnięte z teorii Bretagnona (1982):

$$\begin{aligned}a &= 1,00000101778 \text{ AU} \\ n &= 3548,19280675''/\text{d} \\ e &= 0,016708617 - 0,0000420400 \cdot T - 0,0000001236 \cdot T^3 \\ \varpi &= 102^\circ 56' 14,453'' + 6190,339''T + 1,655''T^2 + 0,0014''T^3 \\ L &= 100^\circ 27' 59,215'' + 129602771,36329''T + 1,093241''T^2 + 0,0000762''T^3 \\ \epsilon &= 23^\circ 26' 21,448'' - 46,8150''T - 0,00059''T^2 + 0,001813''T^3\end{aligned}$$

W rzeczywistości elementy te podlegają bardziej nieregularnym zmianom uwidaczniającym się dopiero w skalach czasowych rzędu 10 tysięcy lat lub większych, kiedy powyższe formuły już tracą ważność. Szczegółowe badania do miliona lat wstecz wykazały, że np. mimośród orbity Ziemi (e) ulega zmianom w zakresie $0 - 0,053$ z dość wyraźnie zaznaczoną okresowością 90 000 lat. Podobnie jest z długością peryhelium (ϖ), w zmianach której widać okres 21 000 lat. Ponadto, w zmianach nachylenia równika Ziemi do ekliptyki ($22,08^\circ < \epsilon < 24,43^\circ$) występuje periodyczność około 41 000 lat.

Wielu współczesnych badaczy uważa (za M. Milankovićem), że wymienione zmiany parametrów orbity Ziemi są odpowiedzialne za duże zmiany klimatyczne w historii Ziemi, w szczególności za ostatnie zlodowacenia. Ich wpływ na klimat objaśnia się modulacją *insolacji* (*nasłonecznienia*, p. 2.8). Wartość energii słonecznej docierającej do Ziemi jest modulowana kwadratem odwrotności odległości Ziemia-Słońce, $\mathcal{E} \sim 1/r^2$, gdzie $r = (1 - e^2)/(1 + e \cos V)$. Długość pór roku, tj. okresów, kiedy długość ekliptyczna Słońca zawiera się pomiędzy 0 i 90° (wiosna na półkuli północnej), 90 i 180° (lato) itd., zależy od aktualnego położenia peryhelium względem punktu równonocy tak, że np. różnica między czasem trwania półrocza letniego (Słońce nad równikiem niebieskim, albo w zakresie $0 - 180^\circ$ długości ekliptycznej) i zimowego wynosi

$$\mathcal{P}_t \frac{4e}{\pi} \sin \varpi,$$

gdzie \mathcal{P}_t jest długością roku zwrotnikowego. Łatwo stąd obliczyć, że o ile dzisiaj ta różnica wynosi 7,6 dni (lato jest dłuższe) to w przeszłości mogła przyjmować tak $+25$ jak i -25 dni.

7.3.2 Współrzędne Słońca

Jeśli zadowala nas dokładność rzędu $0,01^\circ$ to widome (w długości ekliptycznej Słońca uwzględniono efekt aberracji rocznej) współrzędne Słońca w okresie od 1950 do 2050 r. można obliczyć bez potrzeby rozwiązywania równania Keplera według następującego algorytmu (za *Astronomical Almanac 1990*):

L	$=$	$280,460 + 0,9856474 \cdot (JD - 2451545)$	średnia długość \odot [$^\circ$]
M	$=$	$357,528 + 0,9856003 \cdot (JD - 2451545)$	średnia anomalia [$^\circ$]
ϵ	$=$	$23,439 - 0,0000004 \cdot (JD - 2451545)$	[$^\circ$]
λ	$=$	$L + 1,915 \sin M + 0,020 \sin 2M$	długość ekliptyczna [$^\circ$]
β	$=$	0	szerokość ekliptyczna [$^\circ$]
α	$=$	$\arctan \frac{\cos \epsilon \sin \lambda}{\cos \lambda}$	
	$=$	$\lambda - \frac{180}{\pi} \tan^2 \frac{\epsilon}{2} (\sin 2\lambda - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 4\lambda)$	rektascensja [$^\circ$]
δ	$=$	$\arcsin(\sin \epsilon \sin \lambda)$	deklinacja [$^\circ$]
R	$=$	$1,00014 - 0,01671 \cos M - 0,00014 \cos 2M$	odległość od Ziemi [AU]
$\Delta\alpha$	$=$	$(L - \alpha) \cdot 4$	równanie czasu [min.]
ρ	$=$	$0,2666/R$	promień tarczy [$^\circ$]

Współrzędne prostokątne [AU]

$$X = R \cos \lambda \quad Y = R \cos \epsilon \sin \lambda \quad Z = R \sin \epsilon \sin \lambda$$

gdzie współczynniki liczbowe wyrażono w stopniach. Równanie czasu ma dokładność rzędu 0,1 minuty czasu.

W Uzupełnieniach (s. 137) reprodukuje program **SOL**, który pozwala obliczać współrzędne Słońca z dokładnością na ogół lepszą niż 2".

7.4 Współrzędne Księżyca

Księżyc obiega Ziemię ze średnim okresem (względem gwiazd) 27,32166 dni zwanym *miesiącem gwiazdowym (syderycznym)*. W grubym przybliżeniu obieg odbywa się po elipsie (o wielkiej półosi $a = 384747,981$ km i mimośrodku $\epsilon = 0,054880$) nachylonej do płaszczyzny ekliptyki pod kątem $i = 5^{\circ}07'47,4''$. Wskutek grawitacyjnego oddziaływania Słońca i planet na układ Ziemia–Księżyc orbita naszego naturalnego satelity podlega silnym perturbacjom. Wynikiem tego jest m.in. ruch precesyjny płaszczyzny orbity względem ekliptyki z okresem 18,613 lat tak, że węzły orbity Księżyca cofają się po ekliptyce (idą niejako na spotkanie Księżycowi). Ponadto występuje ruch linii apsyd (perygeum obiega Ziemię w okresie 8,85 lat) w sensie ucieczki perycentrum przed Księżycem.

Na skutek wspomnianej precesji dwukrotne przejście Księżyca przez ten sam węzeł zajmuje mu mniej czasu niż miesiąc gwiazdowy: 27,21222 dni. Ten okres nazywa się *miesiącem smoczym* i odgrywa on istotną rolę w zjawiskach zaćmieniowych. Z kolei ruch linii apsyd wydłuża okres obiegu liczony względem perygeum, czyli tzw. *miesiąc anomalistyczny*, do 27,55455 dni.

Oto podstawowe elementy średnie Księżyca według rozwiązania ELP–2000/85 teorii Chapront–Touzé i Chapront (1988; wzięte z *Connaissance des Temps 1991*):

$$\begin{aligned} L &= 218^{\circ}18'59,95571'' + 1732564372,83264T - 4,7763T^2 + 0,006681T^3 - 0,00005522T^4 \\ \varpi &= 83^{\circ}21'11,67475'' + 14648449,3598T - 37,1656T^2 - 0,044970T^3 + 0,00018948T^4 \\ \Omega &= 125^{\circ}2'40,39816'' - 6962890,2656T + 7,4742T^2 + 0,007702T^3 - 0,00005939T^4 \end{aligned}$$

gdzie współczynniki przy T^n podano w sekundach łuku a T jest czasem liczonym w wiekach juliańskich od J2000 ($|T| < 35$).

Powyższy prawie keplerowski opis orbity Księżyca jest jednak w praktyce zbyt mało dokładny. Np., o ile miesiące obliczone z elementów średnich są stosunkowo stabilne (wiekowe zmiany w długości ich trwania są mniejsze od 0,1^s na stulecie), to rzeczywiste wartości mogą odbiegać od średnich nawet o kilka godzin. Nieco lepsze przybliżenie uzyskamy uwzględniając kilka ważniejszych członów perturbacyjnych. Algorytm podany niżej (wg. *Astronomical Almanac 1990*) przybliża geocentryczne i topocentryczne współrzędne Księżyca. Jego błędy rzadko przekroczą 0,3° w długości ekliptycznej (λ) i rektascensji (α), 0,2° w szerokości ekliptycznej (β) i deklinacji (δ), 0,003° w paralaksie horyzontalnej (p), 0,001° w promieniu tarczy (ρ) i 0,2 promienia Ziemi w odległości (R).

$$\begin{aligned} \lambda &= 218,32 + 481267,883T + \\ &+ 6,29 \sin(134,9 + 477198,85T) - 1,27 \sin(259,2 - 413335,38T) + \\ &+ 0,66 \sin(235,7 + 890534,23T) + 0,21 \sin(269,9 + 954397,70T) - \\ &- 0,19 \sin(357,5 + 35999,05T) - 0,11 \sin(186,6 + 966404,05T) \end{aligned}$$

$$\beta = 5,13 \sin(93,3 + 483202,03T) + 0,28 \sin(228,2 + 960400,87T) -$$

$$\begin{aligned}
& -0,28 \sin(318,3 + 6003,18T) - 0,17 \sin(217,6 - 407332,2T) \\
p &= 0,9508 + \\
& + 0,0518 \cos(134,9 + 477198,85T) + 0,0095 \cos(259,2 - 413335,38T) + \\
& + 0,0078 \cos(235,7 + 890534,23T) + 0,0028 \cos(269,9 + 954397,70T) \\
\rho &= 0,2725p \\
R &= 1/\sin p \\
\alpha &= \arctan \frac{0,9175 \sin \lambda - 0,3978 \tan \beta}{\cos \lambda} \\
\delta &= \arcsin(0,3978 \cos \beta \sin \lambda + 0,9175 \sin \beta)
\end{aligned}$$

Współrzędne topocentryczne można obliczyć następująco:

$$\begin{aligned}
X' &= R \cos \delta \cos \alpha - \cos \varphi' \cos T_{\star} & Y' &= R \cos \delta \sin \alpha - \cos \varphi' \sin T_{\star} \\
Z' &= R \sin \delta - \sin \varphi'
\end{aligned}$$

gdzie $T_{\star} = 100,46 + 36000,77T + \lambda' + UT$ λ' — długość geograficzna

$$\begin{aligned}
R' &= \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \\
\alpha' &= \arctan \frac{Y'}{X'} & p' &= \arcsin(1/R') \\
\delta' &= \arcsin(Z'/R') & \rho' &= 0,2725p'
\end{aligned}$$

We wzorach na λ , β , p i T_{\star} podane liczby są wyrażone w stopniach a $T = (JD - 2451545)/36525$.

Znacznie dokładniejsze położenia Księżyca (do 2'') można uzyskać za pomocą procedury opracowanej przez Francuzów (Chapront–Touzé i Chapront 1988). W Uzupełnieniach (s. 139) przedstawiamy uproszczoną jej wersję w postaci programu **LUNE** napisanego w języku FORTRAN (program autora przetestowany względem oryginału o pełnej dokładności). Współrzędne Księżyca obliczone przez **LUNE** mają dokładność na ogół lepszą niż 10''.

7.5 Fazy Księżyca

Znajomość fazy Księżyca przydaje się geografom, marynarzom, pilotom i w innych zawodach w celu orientacji w terenie i w czasie. Wiadomo np., że w czasie pierwszej kwadry Księżyc góruje na południu około 18 godziny czasu słonecznego prawdziwego, o północy w czasie pełni, około 6-tej przy trzeciej kwadrze, a w ogóle nie jest widoczny podczas nowiu. Podobnie, przybliżone momenty wschodów i zachodów Księżyca można ocenić znając jego fazę.

Ogólnie fazę Księżyca definiuje się przez różnicę długości ekliptycznej Księżyca i Słońca $\Delta\lambda$. Różnice 0, 90, 180 i 270° definiują *kwadry*: now, I kwadrę, pełnię i III kwadrę, odpowiednio. Fazie $\Delta\lambda$ odpowiada

$$100 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2}$$

procent oświetlonej powierzchni tarczy Księżyca widzianej z Ziemi. Średni odstęp czasu między takimi samymi fazami nazywa się *miesiącem synodycznym*, a wynosi on obecnie (J2000) 29,530588853 dni. Dla określonego dnia juliańskiego średnią fazę Księżyca

można łatwo obliczyć ze średniej elongacji Księżyca względem Słońca (z różnicy średnich długości ekliptycznych):

$$\mathcal{D} = 1072261,307'' + (1236^r + 1105601,328'')T - 6,891''T^2 + 0,019''T^3, \quad (7.3)$$

gdzie wskaźnik r oznacza pełne obroty (360°), zaś T jest czasem liczonym w stuleciach juliańskich od epoki J2000. Ograniczając się do przedziału czasowego kilku stuleci mamy dla fazy Księżyca (w stopniach):

$$\mathcal{D} = [297,85 + 12,19074912 \cdot (JD - 2451545)] \bmod 360$$

gdzie funkcja \bmod daje resztę z dzielenia lewego argumentu przez prawy. Wynik $\mathcal{D} = 0^\circ$ oznacza now, 90° — I kwadrę itd. (ujemne wartości \mathcal{D} trzeba powiększyć o 360°). Kilka innych sposobów oceny fazy dla wybranej daty kalendarzowej przytaczają Butkevich i Zelikson (1984).

Schematy określania dat faz Księżyca od stuleci opierają się o tzw. *cykl Metona*, tj. przybliżoną wspólną wielokrotność lat zwrotnikowych i miesięcy synodycznych:

cykl Metona: 19 lat zwrotnikowych \approx 235 miesięcy synodycznych

Różnica w tych dwóch wielokrotnościach wynosi zaledwie około 2 godzin, a więc po 19 latach można się spodziewać takiego samego następstwa dat faz Księżyca. Meton z Aten wprowadził ten cykl w roku -431 , ale do dzisiaj jest zagadką jak uzyskano tak precyzyjną relację (niektórzy sugerują, że starożytni astronomowie używali obecnie nieznanymi algorytmów numerycznych).

7.5.1 Data Wielkanocy

Święto Wielkanocy obchodzone jest w całym świecie chrześcijańskim tradycyjnie w okolicy pierwszej wiosennej pełni Księżyca. Ponadto dzień ten ustala daty kilku innych ważnych świąt ruchomych. W kościele rzymsko-katolickim precyzuje się to na pierwszą niedzielę po pierwszej pełni przypadającej po 21 marca. W 1876 r. anonimowy autor opublikował w *Nature* (z dnia 20 kwietnia, na s. 487; reprodukcję można znaleźć w pracy Dutka, 1988) algorytm odpowiadający tej definicji „po wsze czasy” (podobne algorytmy znaleźć można u Kępińskiego 1959, Bertiau 1977, i Webba 1980; tego ostatniego schematu nie polecamy jednak do praktycznych zastosowań).

Oto nieco zmodyfikowany algorytm z *Nature*; oznaczmy przez L rok kalendarza gregoriańskiego. Obliczamy kolejno:

$$A = L \bmod 19 \quad B = \text{int} \frac{L}{100} \quad C = L \bmod 100$$

$$H = (19A + B - \text{int} \frac{B}{4} - \text{int} \frac{B + 1 - \text{int} \frac{B + 8}{25}}{3} + 15) \bmod 30$$

$$K = [32 + 2(B \bmod 4 + \text{int} \frac{C}{4}) - H - (C \bmod 4)] \bmod 7$$

$$M = \text{int} \frac{A + 11H + 22K}{451} \quad N = H + K - 7M + 114$$

Pierwszy dzień Wielkanocy (niedziela) przypadnie na datę $1 + N \bmod 31$ i będzie to w marcu jeśli $\text{int} \frac{N}{31}$ będzie równe 3, w przeciwnym wypadku data jest kwietniowa. W powyższej procedurze przyjęliśmy określenia funkcji *mod* i *int* jak w p. 3.6.

Z powodu silnych okresowych perturbacji orbity Księżyca rzeczywista długość miesiąca synodycznego zmienia się w granicach $\pm 13^h$. Tym nie mniej średni miesiąc jest podstawą rachuby miesięcy w niektórych kalendarzach oraz obliczeń dat ruchomych świąt kościelnych (w szczególności daty Wielkanocy) co niekiedy prowadzi do rozbieżności 1 – 2 dni, które decydują o przesunięciu określonych świąt o cały tydzień albo i miesiąc (było tak np. w 1876 r., kiedy Wielkanoc obchodzono 16 kwietnia zamiast 9).

Pośród innych świąt ruchomych zależne od Wielkanocy są m.in. [z prawej strony podajemy daty w roku 1991 kiedy Wielkanoc przypada na 31 III]:

† Siedemdziesiątnica — 63 dni wcześniej (przed Wielkanocą)	[3 II]
† Środa Popielcowa (Popielec) — 46 dni wcześniej	[13 II]
† Niedziela Palmowa — tydzień wcześniej	[24 III]
† Wniebowstąpienie — 39 dni później (we czwartek)	[9 V]
† Zielone Świątki (Zesłanie Ducha Św.) — po 7 tygodniach	[19 V]
† Trójcy Najświętszej — po 8 tygodniach	[26 V]
† Boże Ciało — 60 dni później (we czwartek)	[30 V]
† Najśw. Serca Pana Jezusa — 68 dni później (w piątek)	[7 VI]

7.5.2 Pływy

Z długości miesiąca gwiazdowego wynika, że Księżyc góruje w danym miejscu codziennie o $24 \cdot 60^m / 27,32166 = 52,7^m$ później. Odstęp między górowaniami jest jednocześnie podwojonym okresem pływów morskich i skorupy ziemskiej (przyływy mają miejsce zarówno w czasie górowania Księżyca lub Słońca, jak i podczas ich dołowania). Mamy stąd około $6^h 13^m$ jako średni odstęp od przyływu do odpływu. Wskutek rozpraszania energii (tarcie) przesuwająca się z zachodu na wschód fala przyływu jest nieco opóźniona względem wywołującego ją ciała. Straty energii w końcowym bilansie zamieniane są z jednej strony na wyhamowywanie rotacji Ziemi, a z drugiej na spowalnianie ruchu orbitalnego Księżyca (poprzez zwiększenie rozmiarów orbity — oddalanie się Księżyca od Ziemi). Ten sam efekt działający na naszym naturalnym satelicie w przeszłości spowodował zrównanie się okresu obrotu Księżyca wokół własnej osi z okresem obiegu wokół Ziemi (z Ziemi widać tylko jedną stronę powierzchni Księżyca).

Silne pływy zawdzięczamy tak stosunkowo dużej masie Księżyca ($\mathcal{M}_K = 1/81$ masy Ziemi) jak niewielkiej jego odległości. Ten ostatni czynnik decyduje, że pływy księżycowe są około dwukrotnie [ściślej: $\mathcal{M}_K / \mathcal{M}_\odot (r_\odot / r_K)^3 = 2,17$ razy, gdzie \mathcal{M} jest masą ciała powodującego pływy a r — jego odległością] silniejsze niż te pochodzące z oddziaływania Słońca. Z prawa powszechnego ciążenia wynika natomiast, że siła albo przyspieszenie pływowe jest proporcjonalne do \mathcal{M}/r^3 . Ogólniej mamy dla *potencjału pływowego* (np. Ma 1978, Baker 1984):

$$U = G\mathcal{M} \left(\frac{1}{r^2 + R^2 - 2rR \cos z'} - \frac{1}{r} - \frac{R \cos z'}{r^2} \right) \approx G\mathcal{M} \frac{R^2}{2r^3} (3 \cos^2 z' - 1), \quad (7.4)$$

gdzie G jest stałą grawitacji, R – odległością rozpatrywanego punktu od środka Ziemi a z' geocentryczną (tj. bez uwzględniania paralaksy horyzontalnej) odległością zenitalną

obiektu powodującego pływy. Przybliżenie w równaniu (7.4) jest niemal ściśle dla przypadku Słońca zaś dla Księżyca uwzględnia około 98 % pełnego potencjału. Pochodna potencjału pływowego na wybranym kierunku jest przyspieszeniem pływowym. Np. składowa wertykalna przyspieszenia wynosi:

$$\frac{dU}{dR} \approx GM \frac{R}{r^3} (3 \cos^2 z' - 1)$$

i dla Księżyca ma wartość rzędu 10^{-7} grawitacyjnego przyspieszenia ziemskiego. Z podanych wzorów wynika, że w danym miejscu pływy są największe podczas górowania Księżyca i muszą ulegać powolnym zmianom w miarę zmian deklinacji tego ciała. Można tutaj łatwo wyróżnić okresowości miesięczną i 19-letnią — związane z orbitalnym obiegiem Ziemi i ruchem linii węzłów.

Wartość pływowego wzniesienia się powierzchni Ziemi ponad średni poziom jest proporcjonalna do potencjału pływowego, przy czym współczynnikiem proporcjonalności jest tzw. *liczba Love'a*, która zależy od składu i struktury skorupy ziemskiej (dzięki tej zależności, pomiary przemieszczeń pływowych przyczyniają się m.in. do poznania budowy i własności wnętrza Ziemi).

Pływowe oddziaływania Słońca i Księżyca sumują się (większe pływy) w czasie pełni i nowiu, tj. w czasie *syzygiów*, zaś znoszą się podczas I i III kwadry Księżyca (tzw. pływy *kwadraturowe*). Na otwartych oceanach amplituda pływów wynosi średnio 60 cm (tj. zaledwie ok. 10^{-7} promienia Ziemi) i zmienia się od 30 (w kwadraturze Słońca z Księżycem) do 80 cm (w syzygium) ale w pobliżu wybrzeży może sięgać nawet kilkunastu metrów, jednak zależy to bardzo silnie od ukształtowania linii brzegowej i dna. W Bałtyku np. fala pływowa ma amplitudę zaledwie ok. 5 cm, a w kanale La Manche — ponad 8 m (Jelley 1986). Trzeba też dodać, że maksimum fali przypływowej na ogół nie przypada na moment górowania Księżyca, lecz jest spóźnione niekiedy nawet o kilka godzin. Ponadto, rozwinięta linia brzegowa może powodować opóźnienia względem fazy Księżyca. Na przykład, na Morzu Północnym pływ syzygijski następuje do 3 dni po nowiu lub pełni Księżyca. Pływy skorupy ziemskiej są około 3-krotnie mniejsze niż w oceanach.

7.6 Zaćmienia

7.6.1 Istota i znaczenie zjawisk zaćmieniowych

Zaćmienie to w ogólności zasłonięcie części lub całej tarczy jednego ciała niebieskiego przez inne. Księżyc w swej comiesięcznej wędrówce wokół Ziemi, gdy znajdzie się na kierunku Słońce – Ziemia winien przesłonić Słońce (w okresie nowiu) bądź zagłębić się w cień Ziemi (w czasie pełni). Nie każdemu obiegowi Księżyca towarzyszą jednak zaćmienia, gdyż orbita naszego naturalnego satelity jest nachylona do płaszczyzny ekliptyki (drogi Słońca na tle gwiazd) pod kątem o rząd większym od widomych tarcz Słońca i Księżyca i kilkakrotnie większym od cienia Ziemi w odległości Księżyca. Jeśli spotkanie (konjunkcja) Księżyca ze Słońcem lub cieniem Ziemi następuje dostatecznie blisko węzłów orbity Księżyca (punktów przebicia płaszczyzny ekliptyki przez orbitę), to niezawodnie mamy zjawisko zaćmienia.

Zaćmienia Słońca, zwłaszcza *centralne* przy których dysk słoneczny zostaje całkowicie przesłonięty przez Księżyc (zaćmienie *całkowite*) lub tarcza Księżyca znajdzie się całym obwodem wewnątrz dysku słonecznego (zaćmienie *obraczkowe*), należą do najbardziej widowiskowych zjawisk przyrody. Podczas całkowitego zaćmienia w pełni dnia dość nagle na kilka minut (do 7^m31^s) zapada prawdziwy zmrok a na niebie pojawiają się planety i najjaśniejsze gwiazdy. Niestety, są to jednak nadzwyczaj rzadkie zjawiska. W określonym miejscu tylko raz na kilkaset lat występuje całkowite zaćmienie Słońca. Dzieje się tak ponieważ cień rzucany przez Księżyc przy powierzchni Ziemi osiąga średnicę co najwyżej kilkaset kilometrów (ściślej: do 270) i chociaż plama taka wędruje tysiące kilometrów (z szybkością pół kilometra na sekundę generalnie ku wschodowi) to zakreślony *pas* (*całkowitego zaćmienia*) stanowi zwykle znacznie mniej niż jeden procent powierzchni Ziemi. Dla obserwatorów poza tym pasem zaćmienie — jeśli w ogóle ma miejsce — jawi się tylko *częściowym*. Ciekawe, że nawet gdy faza zaćmienia częściowego jest względnie duża (sięgająca 98 % przesłoniętej średnicy Słońca), przy bezchmurnej pogodzie nieprzygotowany obserwator może wcale nie zauważyć zjawiska, gdyż ubytek w jasności otoczenia nie jest alarmująco duży (Stephenson i Clark 1978). Z drugiej strony, w pewnych sytuacjach (sprzyjające zachmurzenie lub mgła) zaćmienia nawet o bardzo małej fazie łatwo dają się zauważyć.

W odróżnieniu od zaćmień Słońca zaćmienia Księżyca są widoczne na całej półkuli Ziemi, której biegunem jest punkt podksiężycowy (Księżyc jest w zenicie nad tym punktem). Mimo, że pod względem widowiskowości ustępują wyraźnie słonecznym, zaćmienia te są także zjawiskami o wyjątkowym uroku. Oto jeszcze na krótko przed zaćmieniem na niebie obficie okraszonym blaskiem pełni Księżyca widoczne pozostają jedynie najjaśniejsze gwiazdy. W miarę pograżania się globu księżycowego w cieniu rzucanym przez Ziemię coraz więcej gwiazd pojawia się na niebie. Wreszcie, w czasie pełnej fazy, która może trwać dobrze ponad godzinę (1^h40^m), niebo znów zapełnia miriady gwiazd. Naturalnie nie wszystkie zaćmienia są *całkowitymi*. Częściej bywa, że Księżyc tylko swym fragmentem zanurzy się w stożek cienia Ziemi. Mówimy wtedy o *częściowym* zaćmieniu.

Analiza geometrii zaćmień prowadzi do wniosku, że zaćmienie Słońca może wystąpić w czasie nowiu Księżyca, gdy znajdzie się on w tym momencie nie dalej niż $18^\circ31'$ od węzła (licząc wzdłuż ekliptyki), a musi nastąpić, gdy ta odległość jest mniejsza niż $15^\circ21'$. Analogicznie, zaćmienia Księżyca mogą (muszą) wystąpić, gdy w czasie pełni różnica długości ekliptycznej Księżyca i węzła jest mniejsza niż $12^\circ15'$ ($9^\circ30'$). Można także pokazać, że w ciągu roku muszą wystąpić przynajmniej dwa zaćmienia (wtedy oba są słoneczne) a może ich być nawet siedem (4 słoneczne i 3 księżycowe lub 5 słonecznych i 2 księżycowe). Średnio na jedno stulecie przypada około 237 zaćmień Słońca i 154 zaćmienia Księżyca (w tym 71 całkowitych). Współczesne teorie ruchu Ziemi i Księżyca pozwalają na precyzyjne przewidywanie czasu i miejsca występowania zaćmień, poczynając od czasów starożytnych i w odległą przyszłość.

Istnieje jeszcze trzeci typ zaćmień, nazywanych półcieniowymi, kiedy tarczę Księżyca pokrywa częściowo (rzadziej całkowicie, Meeus 1980) tylko półcień Ziemi (w istocie każde zaćmienie Księżyca poprzedzone jest i kończone fazą półcieniową). Ten rodzaj zaćmień powszechnie umyka uwadze przygodnych obserwatorów, gdyż osłabienie blasku Księżyca jest w czasie tego zjawiska rzeczywiście niewielkie. Niemniej, również takie zaćmienie może być dość łatwo zaobserwowane nieuzbrojonym okiem jeśli jego *faza* (ułamek średnicy tarczy Księżyca pokryty półcieniem) przewyższy ok. 0,7 – 0,8 (Sharonov 1952).

Obserwacje zaćmień półcieniowych są użyteczne w badaniach rozkładu natężenia światła wewnątrz stożka cienia. Rozkład ten zawiera informacje o wyższych warstwach atmosfery Ziemi. W okresie 100 lat mamy średnio około 89 zaćmień półcieniowych. Jeśli w rachunkach uwzględnimy zaćmienia półcieniowe, to w roku muszą wystąpić przynajmniej 4 zaćmienia: po dwa słoneczne i księżycowe. Maksymalna liczba pozostaje 7, z tym że mogą to być także 2 zaćmienia Słońca i 5 Księżycy lub 3 Słońca i 4 Księżycy (Polozova 1955).

Współczesne i historyczne obserwacje zaćmień Słońca i Księżycy, a zwłaszcza zaćmień całkowitych, stanowią unikalne źródło wiedzy o samym Słońcu (np. Sofia i in. 1980), ruchu Księżycy i rotacji Ziemi (np. Borkowski 1988a, Pang i in. 1988, Stephenson i Said 1989). Dla historyków stanowią one bezcenną, niekiedy jedyną, informację o datach przeszłych zdarzeń (de Jong i van Soldt 1989). Dość obszerny przegląd historycznych obserwacji zjawisk zaćmieniowych ukazał się ostatnio w *Uranii* (Zawilski 1990).

Literatura światowa zawiera bogaty zestaw spisów zaćmień (tzw. *kanonów*) od czasów historycznych po daleką przyszłość (np. Oppolzer 1887, Mucke i Meeus 1983, Meeus i Mucke 1983, Liu 1983, Stephenson i Houlden 1986, Espenak 1987). W naszym kraju są to publikacje trudnodostępne lub w ogóle nieosiągalne. Mamy praktycznie całkowity brak wyczerpujących opracowań dla terenu Polski, szczególnie jeśli chodzi o zaćmienia historyczne. Luki tej nie niweluje wyciąg z Oppolzera (1887) dla XX w. zamieszczony w kalendarzu Janiczka (1962). Autor niniejszego opracowania obliczył okoliczności wszystkich zaćmień Słońca i Księżycy dla Polski w okresie obejmującym całą historię naszego kraju (lata 900 – 2200) w oparciu o własny program. Opis tego programu oraz wyniki obliczeń zawierają publikacje Borkowski (1989b; zaćmienia Słońca) oraz Borkowski 1990a,b; zaćmienia Księżycy). Niżej, w p. 7.6.3 i dalej, podajemy omówienie niektórych aspektów tych prac.

Do zjawisk zaćmieniowych zalicza się także zakrycia gwiazd albo *okultacje*. Zakrycia polegają na zasłanianiu gwiazd przez ciała Układu Słonecznego — przede wszystkim przez Księżyc ale także przez planety i ich księżyce oraz planetki (asteroidy). Obserwacyjne pomiary momentów okultacji pozwalają na dokładne wyznaczenia położenia ciał zakrywających względem gwiazd a więc przyczyniają się istotnie do poprawienia efemeryd tych ciał. Zapiski historyczne takich zjawisk (albo tylko bliskich przejść określonych ciał względem innych obiektów niebieskich) mają znaczenie podobne do zaćmień Słońca i Księżycy i tym większe im dawniejsza jest obserwacja.

7.6.2 Okres saros

Astronomowie babilońscy zauważyli, że zaćmienia Słońca i Księżycy powtarzają się z dużą dokładnością w okresie ok. $6585\frac{1}{3}$ dni, t.j. 18 lat i 10 lub 11 dni. Nazwano ten okres *sarosem*, co znaczy „powtórzenie”. W danym miejscu na Ziemi zaćmienie powtarza się mniej więcej o tej samej porze dnia po 3 sarosach. Nietrudno dzisiaj sprawdzić, że okres ten wynika ze zbieżności wielokrotności trzech innych okresów — miesięcy: synodycznego (223 miesiące synodyczne stanowią $6585,32^d$; zaćmienia zsynchronizowane są z pełniami lub nowiami), smoczego (242; zaćmienia zachodzą tylko w okolicach węzłów orbity Księżycy) i anomalistycznego (239; rodzaj zaćmienia zależy od odległości Księżycy od Ziemi). Saros to także około 19 lat zaćmieniowych ($6585,781^d$). Ze względu na końcówkę 0,32 dnia w tym okresie, po jednym sarosie pasy centralnych zaćmień na Ziemi są przesunięte

w kierunku zachodnim o 115° (Illingworth 1985). Pełny cykl sarosu obejmuje około 70 zaćmień, w tym 42 zaćmienia słoneczne i 28 Księżyca.

7.6.3 Obliczanie okoliczności zaćmień Słońca i Księżyca

Przez okoliczności zaćmienia normalnie rozumie się warunki przebiegu zaćmienia: momenty kontaktów dysków ciał uczestniczących w zjawisku, moment i wartość maksymalnej fazy i położenia dysków w układzie horyzontalnym i ewentualnie względem bieguna niebieskiego. Sposób obliczania takich parametrów przedstawimy na podstawie wspomnianego już programu (jest on napisany w języku FORTRAN77). Ze względu na znaczną objętość i złożoność (część kompilowalna zajmuje w pamięci komputera około 50 000 bajtów) nie będziemy go tutaj reprodukować ograniczając się do krótkiego opisu działania.

Omawiany program może utworzyć listę zaćmień (jednego z trzech typów) dla zadanego miejsca (lub kilkunastu miejsc jednocześnie) w zadanym okresie, obliczyć okoliczności tylko najbliższego zaćmienia albo prześledzić przebieg zaćmienia z zadanym krokiem (z dodatkową możliwością graficznego przedstawienia na ekranie komputera). Zasadniczym elementem programu są procedury obliczania pozycji Słońca i Księżyca na wybrany moment czasu dynamicznego (TDT albo ET). Obecna wersja wykorzystuje algorytmy dające położenie tych dwóch ciał z dokładnością $2''$: podprogram **SOL** (s. 137) dla Słońca i algorytm opisany w pracy Chapront-Touzé i Chapront 1988. Oba algorytmy, w stosunku do oryginałów, zostały nieco zmodyfikowane — tak, by uwzględnić nutację i móc dobierać wiekowe pływowe przyspieszenie Księżyca (standartowo $-26''/\text{cy}^2$). Wartości $ET - UT$, używane do modyfikacji długości geograficznej i zamiany czasu dynamicznego na uniwersalny, są obliczane zgodnie z opracowaniem Stephensona i Morrisona (1984). Dla wyników po roku 1990 (kiedy kończą się dane obserwacyjne i krótkoterminowe przewidywania dostępne w rocznikach astronomicznych) użyto wzoru (w s):

$$ET - UT = 25.5 \left(\frac{\text{rok}}{100} - 17.955 \right)^2 - 34, \quad (7.5)$$

który różni się od oryginalnego o wypisane 34 s i gdzie *rok* jest rokiem kalendarzowym. Daty kalendarzowe przeliczane są zgodnie z algorytmami Hatcher'a (1984).

W celu uzyskania kompletnego spisu zaćmień omawiany program przeszukuje wszystkie opozycje lub konjunktje (w długości ekliptycznej) Słońca z Księżycem, poczynając od podanej daty. Kiedy szerokość ekliptyczna w analizowanym momencie jest mniejsza od z góry zadanej wartości (innej dla zaćmień Słońca i Księżyca) wówczas przeprowadzana jest szczegółowa analiza możliwego zaćmienia i badanie czy będzie ono widoczne z określonego miejsca.

Dla zaćmień Słońca analiza ta przeprowadzana jest bezpośrednio na współrzędnych topocentrycznych a nie, jak to się zwykle robi (np. *Explanatory Supplement AENA* 1961), poprzez *elementy Bessela*. W tym celu w cyklicznym procesie zawężającym przedział czasu w okolicy maksimum fazy do około 4 minut wyznacza się moment maksymalnej fazy przez dopasowanie paraboli do odległości środków tarcz Słońca i Księżyca w trzech punktach na tym przedziale. Następnie, w innym procesie iteracyjnym (metoda Newtona) wyznaczane są *momenty kontaktów* (zrównanie odległości z sumą promieni tarcz).

W przypadku zaćmień Księżyca (cieniowych i półcieniowych) podobna analiza wykonywana jest także w oryginalny sposób. Ponieważ okazało się, że w istocie będąc prostą

jest zarazem bardzo dokładną metodą nie wymagającą żadnych iteracji omówimy ją tutaj nieco bliżej.

7.6.4 Algorytm obliczania okoliczności zaćmień Księżyca

Po wykryciu możliwości zaistnienia zaćmienia Księżyca oblicza się kątową odległość tego ciała od kierunku środka cienia Ziemi (punktu na niebie położonego dokładnie naprzeciwko Słońca) co pozwala na zgrubną ocenę czasu trwania zaćmienia (korzysta się tu ze wzoru typu (7.12) niżej). Następnie oblicza się współrzędne ekliptyczne (szerokość β i długość λ) Księżyca i cienia dla dwóch momentów (ET i ET' położonych symetrycznie względem momentu opozycji) odległych o oceniony czas trwania (jednak nie mniej niż o jedną godzinę). Dalsze rachunki przeprowadzane są w układzie współrzędnych: szerokość – różnicowa długość ekliptyczna (ta druga współrzędna, oznaczmy ją przez Λ , jest różnicą aktualnej długości i długości środka cienia). Momenty maksymalnej fazy ET_0 i kontaktów cienia lub półcienia z brzegiem dysku księżycowego: początek albo tzw. drugi kontakt ($ET_0 - t/2$) i koniec zaćmienia albo tzw. trzeci kontakt ($ET_0 + t/2$), są teraz obliczane w sposób ścisły. Dwa położenia Księżyca względem cienia, (Λ, β) i (Λ', β') , określają jednoznacznie chwilową „orbitę” Księżyca, którą opisuje inklinacja względem ekliptyki oraz długość (różnicowa) węzła wstępującego:

$$i = \arccos(\sin \Psi \cos \beta) \quad (7.6)$$

oraz

$$\Omega = \Lambda - \arctan \frac{\sin \Psi \sin \beta}{\cos \Psi}, \quad (7.7)$$

gdzie

$$\Psi = \arctan \frac{\sin(\Lambda' - \Lambda)}{\cos \beta \tan \beta' - \sin \beta \cos(\Lambda' - \Lambda)} \quad (7.8)$$

a funkcja \arctan w (7.7) i (7.8) musi być obliczana w przedziale $\pm\pi$ zgodnie ze znakami licznika (znak sinusa obliczanego kąta) i mianownika (znak kosinusa) jej argumentu. Kątowa odległość od początku liczenia współrzędnych, który tutaj pokrywa się ze środkiem cienia, do koła wielkiego drogi Księżyca wynosi:

$$\sigma_0 = \arcsin(\sin i \sin \Omega). \quad (7.9)$$

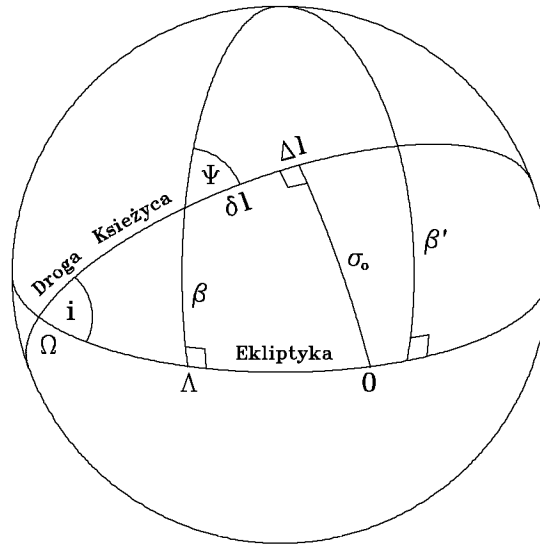
To największe zbliżenie Księżyca do cienia przypada w punkcie jego orbity odległym od (β, Λ) o łuk:

$$\delta l = \arcsin \frac{\sin \sigma_0 \cos \Psi - \sin \Lambda}{\cos \sigma_0 \sin \Psi} \quad (7.10)$$

tak, że czas maksymalnej fazy dostaje się z:

$$ET_0 = ET + \frac{\delta l}{n}, \quad (7.11)$$

gdzie $n = \Delta l / (ET' - ET)$ jest aktualną kątową prędkością Księżyca wzdłuż orbity, przy czym $\Delta l = \arcsin[\cos \beta' \sin(\Lambda' - \Lambda) / \sin \Psi]$.



Rys. 7.1 Zależności kątowe na sferze niebieskiej wykorzystywane w nowej metodzie obliczania okoliczności zaćmień Księżyca. Dla przejrzystości nie zachowano właściwych proporcji (np. kąt i w rzeczywistości jest mniejszy od 6°)

Wreszcie, czas trwania zaćmienia wylicza się z:

$$t = \frac{2}{|n|} \arccos \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma_0}, \quad (7.12)$$

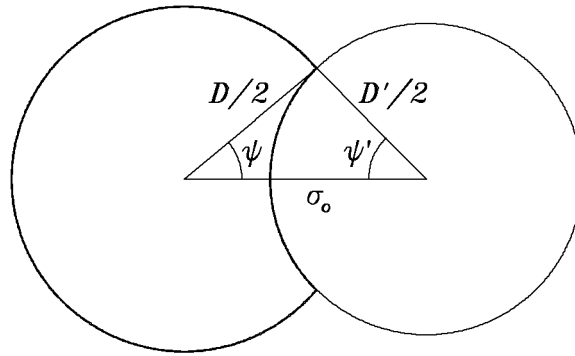
gdzie σ jest równe $(D_u + D_m)/2$ dla całkowitego czasu trwania zaćmienia a $(D_u - D_m)/2$ dla fazy zaćmienia całkowitego, w których D_u i D_m są kątowymi średnicami cienia lub półcienia i Księżyca, odpowiednio. W obliczeniach praktycznych przyjęto, jak to się na ogół czyni, standartowo powiększony cień geometryczny Ziemi (o czynnik 1,02) aby uwzględnić wpływ atmosfery Ziemi. Warto jednak pamiętać, że być może nie jest to najlepsza poprawka i np. Francuzi robią to inaczej (Meeus 1980, Raab 1988).

Na zakończenie procedury oblicza się na nowo współrzędne równikowe Księżyca i cienia dla znalezionych trzech momentów, $ET_0 \pm t/2$ oraz ET_0 , w celu obliczenia lokalnych okoliczności zaćmienia, tj. współrzędnych horyzontalnych Księżyca i położenia środka cienia względem środka Księżyca (kąta V mierzonego w lewo od kierunku na zenit). Naturalnie, trzeba tu uwzględnić paralaksę dobową i refrakcję atmosferyczną.

7.6.5 Faza zaćmienia

Liniową fazę zaćmienia definiuje się przez zaciemniony ułamek średnicy D tarczy ciała ulegającego zaćmieniu:

$$f = \frac{1}{2} + \frac{D' - 2\sigma_0}{2D}, \quad (7.13)$$



Rys. 7.2 Powierzchniowa faza zaćmienia wyraża przesłonięty ułamek tarczy ciała zaćmiewanego. Można ją obliczyć znając zaznaczone kąty ψ i promienie tarcz

gdzie D' jest średnicą obiektu zasłaniającego a σ_0 — odległością środków obiektów uczestniczących w zjawisku. Problem obliczenia tzw. fazy powierzchniowej, tj. zaciemnionego ułamka lub procentu F powierzchni tarczy, nie jest już tak trywialny. Jedno z rozwiązań ma taką postać:

$$\psi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{f \left(\frac{D'}{D} - f \right)}{x}} \quad \psi' = 2 \arcsin \sqrt{\frac{f(1-f)D}{D'x}},$$

$$F = \frac{100}{\pi} \left[\psi + \left(\frac{D'}{D} \right)^2 \psi' - x \sin \psi \right], \quad (7.14)$$

gdzie $x = 1 + D'/D - 2f = 2\sigma_0/D$ zaś parametry ψ są połówkami kątów pod jakimi widać punkty przecięcia się brzegów tarcz z ich środków, wyrażonymi w radianach. Inne sposoby podają Dagaev (1978, ten algorytm zawodzi jednak w pewnych sytuacjach) i Merletti (1986).

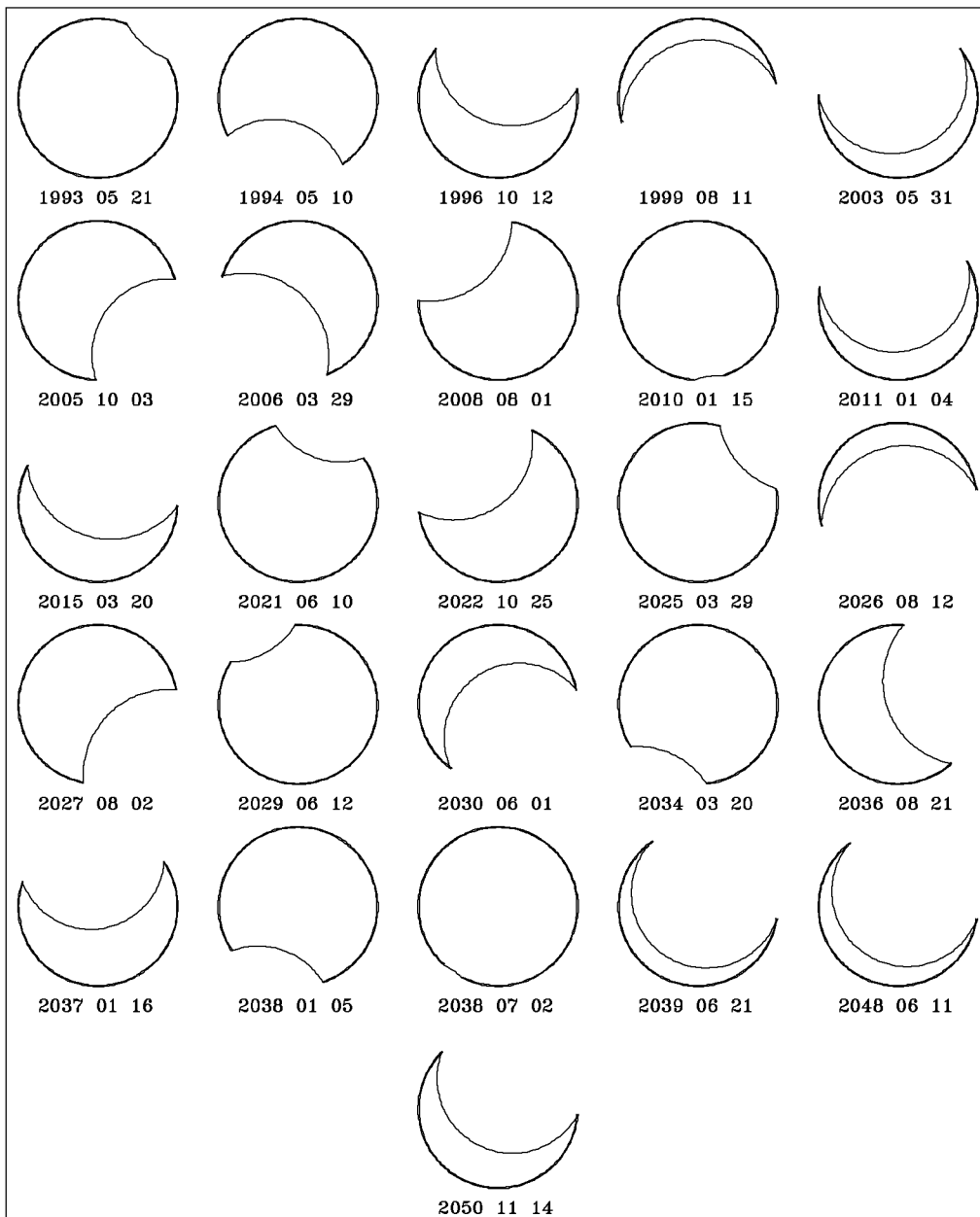
7.6.6 Najbliższe zaćmienia widoczne w Polsce

Tutaj i na s. 123 podajemy listy zaćmień Słońca i Księżycy, jakie będą widoczne (o ile pogoda będzie łaskawa) w Polsce w ciągu kilkudziesięciu lat poczynając od 1991 r. Należy zwrócić uwagę na to, że jeśli zaćmienie Słońca przebiega podczas wschodu lub zachodu, to w tabelce podano jako moment początku (wschód) lub końca (zachód) tego zaćmienia chwilę wschodu lub zachodu Słońca definiowaną w tym szczególnym przypadku jako moment kiedy dolny skraj tarczy Słońca pokrywa się z horyzontem (rzeczywista wysokość $-18'$ jest w tabeli zaokrąglona do 0°).

Zaćmienia Słońca widoczne w Polsce w latach 1991 – 2050

obliczone dla geograficznego położenia Warszawy. *CET* jest czasem środkowoeuropejskim ($UT+1^h$), h i a – wysokością i azymutem Słońca, V – kątem pozycyjnym Księżycy względem kierunku na zenit, $D_{s/m}$ – średnicą tarczy (Słońca/Księżycy)

Data			Początek			Maksimum fazy							Koniec			
Rok	M	d	<i>CET</i>	h	V	<i>CET</i>	h	a	V	faza	F	D_s	D_m	<i>CET</i>	h	V
			h m	stopnie		h m	stopnie			%	'	'		h m	stopnie	
1993	5	21	1618	27	299	1642	24	93	319	0,061	2	31,6	30,8	1705	20	339
1994	5	10	1838	4	194	1912	0	120	166	0,354	23	31,7	29,5	2014	-8	93
1996	10	12	1423	19	280	1535	10	64	343	0,658	56	32,1	30,7	1642	1	50
1999	8	11	1032	51	294	1151	53	4	195	0,858	83	31,6	32,5	1310	49	96
2003	5	31	327	0	291	424	7	243	17	0,837	77	31,6	29,7	524	16	102
2005	10	3	913	27	297	1021	32	341	232	0,421	30	32,0	30,4	1132	34	164
2006	3	29	1054	40	212	1157	41	6	138	0,537	44	32,0	33,6	1300	39	65
2008	8	1	952	49	4	1050	54	338	41	0,344	23	31,5	32,9	1148	56	75
2010	1	15	702	-6	220	743	0	306	188	0,019	0	32,5	29,5	749	1	183
2011	1	4	813	3	299	936	10	331	8	0,817	75	32,5	30,7	1104	15	74
2015	3	20	947	32	284	1056	37	345	345	0,723	66	32,1	33,8	1207	37	44
2021	6	10	1055	60	320	1154	61	9	340	0,196	10	31,5	30,0	1253	57	2
2022	10	25	1014	24	346	1123	26	1	35	0,521	41	32,2	32,0	1232	24	84
2025	3	29	1150	41	288	1228	40	16	312	0,157	7	32,0	33,7	1306	38	338
2026	8	12	1814	7	249	1902	0	115	192	0,850	82	31,6	32,6	1955	-7	92
2027	8	2	926	46	288	1022	52	328	226	0,413	30	31,5	33,9	1119	55	161
2029	6	12	326	1	358	353	4	236	30	0,122	5	31,5	30,4	420	7	60
2030	6	1	516	15	285	622	25	265	212	0,722	64	31,5	29,6	734	36	136
2034	3	20	1110	37	193	1149	38	2	155	0,147	7	32,1	33,4	1228	37	116
2036	8	21	1811	4	266	1843	0	110	289	0,570	48	31,6	33,4	1947	-9	58
2037	1	16	909	9	309	1036	15	343	6	0,638	53	32,5	29,9	1207	17	60
2038	1	5	1503	3	187	1534	0	52	160	0,215	11	32,5	31,2	1640	-9	93
2038	7	2	1511	41	154	1523	39	77	145	0,013	0	31,5	31,0	1534	37	136
2039	6	21	1826	11	239	1926	4	125	328	0,873	82	31,5	29,6	2022	-3	57
2048	6	11	1323	54	257	1450	43	71	330	0,854	80	31,5	29,7	1609	31	51
2050	11	14	1351	12	267	1511	4	53	334	0,759	68	32,3	30,4	1624	-6	45

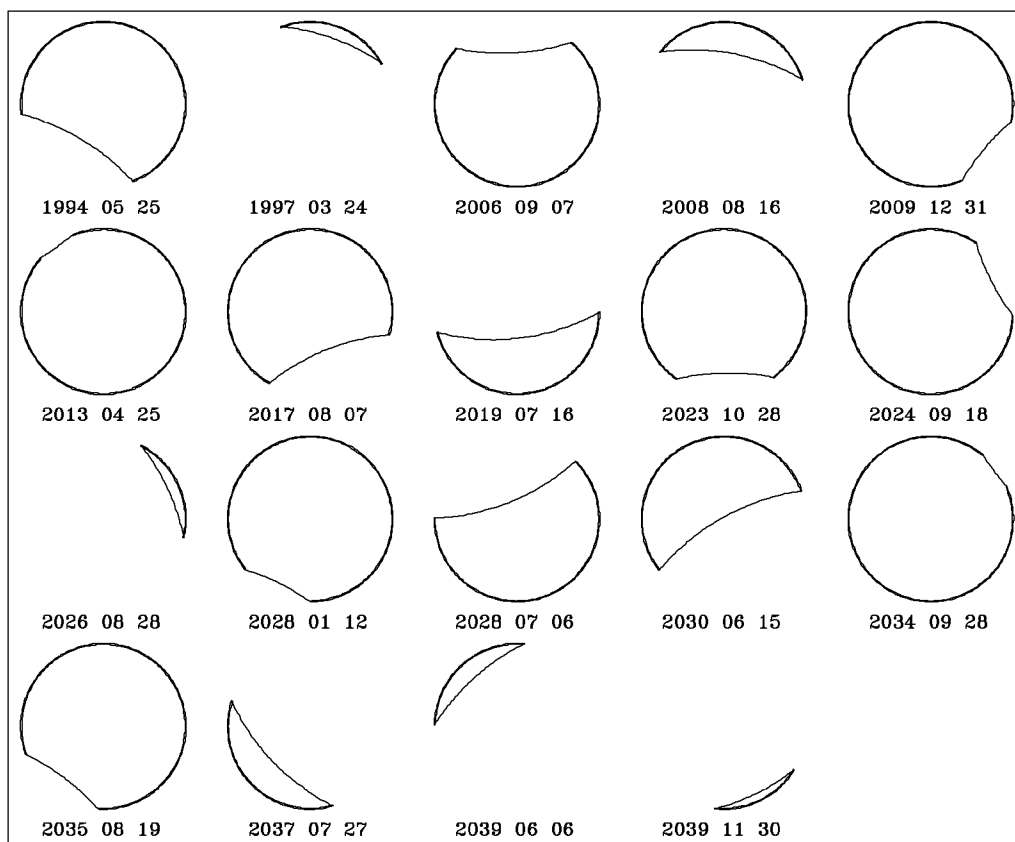


Rys. 7.3 Zaćmienia Słońca widoczne w Polsce do roku 2050. Poszczególne sierpy przedstawiają widok zaćmionego Słońca w momencie maksymalnej fazy w Warszawie

Początki i końce zaćmień Księżyca nie ograniczaliśmy do widoczności z Warszawy, gdyż w innych miejscach są one obserwowalne dopóty, dopóki Księżyc znajduje się nad horyzontem. Chwile wschodów i zachodów Księżyca w Warszawie podajemy w osobnej kolumnie tabeli. I tutaj zjawiska te definiowane są tak, jak w przypadku Słońca: dolny skraj tarczy Księżyca na horyzoncie.

Ze szczegółowych obliczeń (Borkowski 1989b, Fangor 1988, Wiland i Zawilski 1986) wynika, że w najbliższych latach nie będziemy w Polsce oglądać żadnego centralnego zaćmienia Słońca. W istocie będzie tak aż do roku 2075, kiedy to wystąpi obrączkowe zaćmienie widoczne m.in. z Krakowa, lecz np. Warszawa będzie musiała poczekać na podobną okazję ponad 200 lat – do 2195 r. (wspomnieć warto, że ostatnio Warszawa była świadkiem centralnego zaćmienia 28 lipca 1851 r., a było ono całkowitym).

Dla odmiany, wśród 52 zaćmień Księżyca widocznych w Polsce w latach 1990 – 2040 będzie aż 33 typu całkowitego (choć nie wszystkie będą widoczne w czasie maksimum ich fazy).



Rys. 7.4 Częściowe cieniowe zaćmienia Księżyca widoczne w Polsce w latach 1991 – 2040 (na rysunku tym nie zaznaczono zaćmień całkowitych). Poszczególne sierpy przedstawiają widok zaćmionego Księżyca w momencie maksymalnej fazy

Zaćmienia Księżyca widoczne w Polsce w latach 1991 – 2040

Współrzędne horyzontalne (h i a), V i momenty wschodów/zachodów Księżyca (W/Z) dotyczą geograficznego położenia Warszawy, CET jest czasem środkowoeuropejskim ($UT+1^h$), V – kątem pozycyjnym cienia Ziemi względem kierunku na zenit, D – średnicą półcienia (p) i cienia (u) Ziemi oraz tarczy Księżyca (m)

Rok	M	d	Początek		Maksimum fazy						Koniec		W/Z CET		
			CET	h	CET	h	a	V	faza	D_p	D_u	D_m		CET	h
			h m	°	h m	°	°	°	'	'	'	h m	°	h m	
1992	12	9	2259	60	2444	57	34	159	1,274	152,4	86,0	31,8	2629	45	3154
1993	11	29	540	13	726	-1	126	324	1,091	146,1	79,8	30,1	912	-12	719
1994	5	25	337	0	430	-8	66	149	0,248	156,7	92,1	33,2	523	-15	333
1996	4	3	2321	31	2510	28	26	2	1,383	149,3	84,0	31,1	2658	17	2908
1996	9	27	212	28	354	15	73	127	1,244	154,7	89,5	32,6	536	0	538
1997	3	24	357	14	539	-1	89	160	0,923	144,1	78,5	29,7	721	-16	534
1997	9	16	1808	3	1947	17	300	15	1,197	157,9	92,9	33,5	2125	28	1748
2000	1	21	402	30	543	15	102	327	1,330	157,3	90,9	33,1	725	1	735
2001	1	9	1942	35	2120	49	304	216	1,194	158,5	92,0	33,4	2259	58	1525
2003	5	16	303	5	440	-8	68	163	1,132	157,5	92,8	33,4	617	-22	343
2003	11	9	032	50	218	39	61	303	1,021	143,4	77,4	29,5	404	24	658
2004	5	4	1948	6	2130	15	330	42	1,308	156,3	91,5	33,1	2312	20	1858
2004	10	28	214	36	404	21	83	116	1,311	147,2	81,4	30,5	554	5	634
2006	9	7	1905	7	1951	13	302	3	0,188	157,7	92,8	33,4	2037	19	1815
2007	3	3	2230	42	2421	44	11	201	1,236	144,3	78,4	29,7	2611	35	3023
2008	2	21	243	35	426	20	80	349	1,109	149,7	83,6	31,1	609	5	641
2008	8	16	2035	13	2210	21	336	169	0,812	147,3	82,8	30,7	2344	24	1851
2009	12	31	1952	38	2022	43	288	230	0,080	157,7	91,2	33,2	2053	47	1509
2010	12	21	732	1	917	-9	149	165	1,260	152,1	85,7	31,7	1101	-15	743
2011	6	15	1923	-4	2112	7	327	199	1,704	151,7	87,4	31,9	2302	13	1954
2011	12	10	1345	-10	1532	1	234	33	1,110	145,9	79,5	30,1	1718	15	1524
2013	4	25	2052	14	2107	15	323	36	0,019	155,0	90,1	32,7	2123	17	1848
2015	9	28	207	28	347	15	71	307	1,282	158,0	92,8	33,5	527	1	536
2017	8	7	1822	-7	1920	2	299	202	0,250	145,6	81,2	30,3	2018	9	1908
2018	1	31	1248	-20	1430	-14	219	34	1,321	157,4	91,1	33,2	1611	-2	1628
2018	7	27	1924	-1	2121	12	326	193	1,612	142,4	78,1	29,4	2319	18	1929
2019	1	21	433	26	612	11	107	148	1,200	158,4	91,9	33,4	751	-2	739
2019	7	16	2101	7	2230	13	343	7	0,658	144,4	80,1	30,0	2360	15	1947
2022	5	16	327	1	511	-13	74	341	1,419	155,9	91,3	33,0	655	-28	337
2023	10	28	2034	39	2114	44	315	181	0,127	154,0	88,2	32,3	2153	48	1604
2024	9	18	312	17	344	13	67	297	0,088	157,7	92,7	33,4	416	9	520
2025	3	14	609	-2	758	-18	119	177	1,182	144,4	78,6	29,8	948	-31	555
2025	9	7	1726	-7	1911	9	293	6	1,366	153,5	88,7	32,3	2056	22	1810
2026	8	28	333	9	512	-5	80	115	0,934	147,0	82,3	30,6	652	-19	442
2028	1	12	444	26	513	22	98	154	0,070	157,5	91,0	33,2	541	17	753
2028	7	6	1808	-15	1919	-5	303	22	0,394	145,8	81,5	30,3	2030	3	2003
2028	12	31	1607	5	1751	19	257	231	1,250	151,8	85,3	31,6	1936	34	1523
2029	6	26	232	4	422	-8	61	140	1,848	152,1	87,8	32,0	612	-23	314
2029	12	20	2155	55	2341	60	4	3	1,121	145,7	79,2	30,0	2528	53	3156
2030	6	15	1820	-12	1933	-3	306	209	0,507	156,9	92,6	33,3	2045	5	1953
2032	10	18	1824	17	2002	31	298	198	1,106	155,5	89,9	32,8	2140	43	1626
2033	4	14	1824	0	2012	14	308	225	1,098	143,6	78,4	29,6	2160	24	1825
2034	9	28	330	17	346	15	70	307	0,019	155,0	89,8	32,7	401	13	534
2035	8	19	131	20	210	17	39	143	0,107	145,4	80,8	30,2	249	13	437
2036	2	11	2130	42	2311	50	345	23	1,305	157,6	91,3	33,2	2453	49	1620
2036	8	7	155	15	351	2	58	136	1,457	142,5	78,0	29,4	547	-14	411
2037	1	31	1321	-18	1460	-10	225	218	1,211	158,2	91,8	33,4	1639	2	1623
2037	7	27	332	2	508	-11	71	314	0,814	144,7	80,3	30,0	645	-25	345
2039	6	6	1823	-11	1953	1	310	222	0,889	157,5	93,1	33,4	2123	9	1948
2039	11	30	1611	6	1755	20	262	26	0,946	143,7	77,4	29,5	1938	36	1526
2040	11	18	1812	23	2003	39	291	199	1,401	148,0	81,9	30,7	2153	53	1532

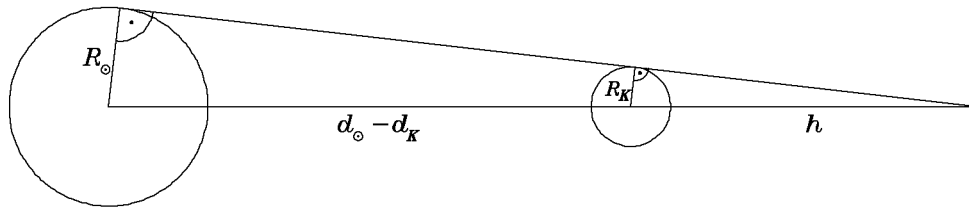
7.7 Przykłady

Przykład 7.1

Obliczyć wysokość stożka cienia Księżyca w oświetleniu słonecznym, gdy Ziemia jest w peryhelium a Księżyc w apogeum.

--- ◇◇ ---

$$\begin{aligned}
 d_K &= a_K (1 + e_K) = 384748 \cdot 1,05488 \text{ km} = 405863 \text{ km} && \text{--- odległość Księżyca} \\
 d_{\oplus} &= a_{\oplus} (1 - e_{\oplus}) = 0,98328 \text{ AU} = 147100000 \text{ km} && \text{--- odległość Słońca} \\
 R_{\odot} &= 696000 \text{ km} && \text{--- promień Słońca} \\
 R_K &= 1738 \text{ km} && \text{--- promień Księżyca} \\
 h &= \frac{(d_{\oplus} - d_K) \cdot R_K}{R_{\odot} - R_K} = \frac{146492,2 \cdot 1,738}{696 - 1,738} = 366,7 \text{ tys. km} && \text{--- wysokość stożka}
 \end{aligned}$$



Rys. 7.5 Rysunek pomocniczy do obliczania wysokości stożka cienia Księżyca

Przykład 7.2

Obliczyć średnicę przekroju stożka cienia Księżyca na powierzchni Ziemi, gdy Ziemia jest w aphelium a Księżyc w perygeum.

--- ◇◇◇ ---

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{R_K(h - H)}{h} = R_K \left(1 - \frac{H}{h}\right) && \text{--- promień przekroju} \\
 h &= \frac{152100000 - 363600}{399,46} = 379,85 \text{ tys. km} && \text{--- wysokość stożka} \\
 2x &= 2 \cdot 1738 \cdot \left(1 - \frac{363600 - 6378}{379850}\right) \text{ km} \approx 207 \text{ km} && \text{--- średnica cienia na Ziemi}
 \end{aligned}$$

Przykład 7.3

Obliczyć średnicę przekroju stożka cienia Ziemi płaszczyzną przechodzącą przez środek Księżyca, gdy Księżyc jest w apogeum a Ziemia w peryhelium.

--- ◇◇◇ ---

$$\begin{aligned}
 h_{\oplus} &= \frac{147100000}{108,13} = 1360400 \text{ km} \\
 2x &= \frac{12756 \cdot (1360400 - 405863)}{1360400} = \frac{12176000000}{1360400} = 8950 \text{ km} \\
 &\text{(jest to ok. 2,6 razy więcej niż średnica Księżyca, która wynosi 3476 km).}
 \end{aligned}$$

Przykład 7.4

Dnia 3 IV 33 r.n.e. miało miejsce zaćmienie Księżyca, które trwało 171 minut z maksimum fazy (przesłonięte 58 % średnicy Księżyca) o godzinie $17^h 38^m ET$. Wielu historyków łączy to zaćmienie z ukrzyżowaniem Jezusa z Nazaretu, które prawdopodobnie odbyło się kilka godzin wcześniej. Zakładając, że w tamtym roku różnica między czasem efemeryd i uniwersalnym (ΔT) wynosiła 150 minut (jest to wartość szacunkowa) ocenić, czy zaćmienie to mogło być widoczne z Jerozolimy ($\varphi = 31,8^\circ$, $\lambda = 2^h 20^m$).

- - - ◇◇ - - -

W 33 r. dzień 3 kwietnia kalendarza juliańskiego odpowiada 1 IV naszego kalendarza. Dla celów oszacowania deklinacji Słońca i równania czasu skorzystamy ze współczesnych kalendarzy astronomicznych; pod datą 1 kwietnia znajdujemy w nich: $\delta_\odot \approx +4,5^\circ$, $\Delta\alpha \approx -4^m$. Lokalny dla Jerozolimy czas słoneczny prawdziwy w chwili maksimum zaćmienia wynosi:

$T_\odot = UT + \Delta\alpha + \lambda = ET - \Delta T + \Delta\alpha + \lambda \approx 17^h 38^m - 150^m - 4^m + 2^h 20^m = 17^h 24^m$.
W tym momencie (chwila pełni Księżyca) kąt godzinny Księżyca jest większy od kąta godzinnego Słońca o 12^h :

$$t_K = t_\odot + 12^h = T_\odot = 17^h 24^m.$$

Dla momentu wschodu Księżyca powinniśmy wziąć dla:

$$t_w = -\arccos(-\tan \delta_K \tan \varphi) = -\arccos(\tan \delta_\odot \tan \varphi) \quad (\text{bo } \delta_K \approx -\delta_\odot).$$

Jest zatem

$t_w = 24^h - \arccos(\tan 4,5^\circ \tan 31,8^\circ) = 24^h - \arccos(0,0488) = 24^h - 5^h 49^m = 18^h 11^m$.
Widzimy stąd, że moment maksimum fazy przypada około $18^h 11^m - 17^h 24^m = 47^m$ przed wschodem Księżyca w Jerozolimie. Z drugiej strony, koniec zaćmienia następuje o godzinie $17^h 24^m + 171^m/2 = 18^h 50^m$, a więc około 40 minut po wschodzie Księżyca. Możemy stąd wnosić, że kilka — może kilkadziesiąt — końcowych minut zaćmienia mogło przebiegać nad horyzontem Jerozolimy.

Dodajmy, że ostatnie dokładne analizy widoczności tego zaćmienia przy horyzoncie każą Schaeferowi (1990) wyrokować, że w tym konkretnym przypadku jest bardzo mało prawdopodobne by Żydzi mogli zauważyć to zjawisko.

Przykład 7.5

Według B. Thākury (w: Prabhupāda, 1984, s. xiv) głosiciel *bhakti-jogi* Pan Caitanya Mahāprabhu — jedno z ostatnich wcieleń Pana Kṛṣṇy (Kryszny) — urodził się w Māyāpur w mieście Nadia tuż po zachodzie Słońca dnia 18 lutego 1486 r.n.e. podczas zaćmienia Księżyca. Korzystając z dowolnego współczesnego kalendarza astronomicznego sprawdź czy w podanym dniu mogło wystąpić zaćmienie Księżyca.

- - - ◇◇ - - -

Sprawdźmy, czy we wskazanym dniu była pełnia Księżyca. Zgodnie z kalendarzem na rok 2000 (p. 8.2) stwierdzamy, że pełnia przypada na dzień 21 I (JD2451565). Obliczamy teraz juliański numer dnia urodzenia Pana Caitanyi stosując reguły podane w p. 3.6:

$$L' = 6201 \quad M' = 11 \quad G = 0 \quad JD = 2264915 + 337 + 18 - 0 - 1402 = 2263868.$$

Od tamtego dnia do 21 I 2000 r. upłynęło więc $2451565 - 2263868 = 187697$ dni, tj. $6356 \cdot 29,5306^d + 0,5^d$ czyli prawie okrągła liczba 6356 miesięcy synodycznych, a zatem powinien to być również dzień pełni Księżyca. To samo możemy osiągnąć bez rocznika obliczając średnią elongację Księżyca względem Słońca według wzoru (7.3):

$$T = -5,1383162, \quad 1236^r \cdot T = -6350,9588232^r = -6350^r - 1242634,8''$$

pomijając w dalszych rachunkach -6350 rotacji mamy (w sekundach łuku):

$$\mathcal{D} = 1072261,3 - 1242634,8 - 5680929,2 - 181,9 - 2,6 = -5851487,2 = -3600 \cdot 1625,41$$

tj., pomijając znów pełne rotacje ($-5 \cdot 360^\circ$), $\mathcal{D} = 174,58^\circ$. Pamiętając, że w ciągu doby Księżyc przesuwa się po niebie o ok. 13 stopni, stwierdzamy ponownie, że w dyskutowanym dniu Księżyc był w przybliżeniu w opozycji do Słońca ($\mathcal{D} = 180^\circ$). Naturalnie, nie możemy całkowicie polegać na obliczaniu *średnich* parametrów; trzeba takie wyniki traktować jako szacunkowe. W istocie jednak, jak pokazują ściśle obliczenia, dnia 18 II 1486 r. miało miejsce całkowite zaćmienie Księżyca (o fazie w maksimum 1,15), które trwało od 16⁰³ do 19³³ czasu środkowoeuropejskiego i było widoczne szczególnie dobrze w azjatyckiej części świata (ale także w Polsce).

Przykład 7.6

Jednym z kompleksowych pozaastronomicznych zastosowań astronomii sferycznej i umiejętności obliczania położenia ciał niebieskich jest obliczanie horoskopów. W tym przykładzie rozwiążemy zadanie polegające na ułożeniu horoskopu dla XXI wieku dla miasta Torunia ($\varphi = 53,1^\circ$, $\lambda = 18,55^\circ$). Analizując go niechaj Student pamięta, że szereg pojęć i terminów tu występujących nie należy do zakresu astronomii.

- - - - $\diamond\diamond$ - - - -

Na początek musimy odczytać z rocznika lub obliczyć efemerydy (tj. położenia) ciał Układu Słonecznego na wybrany moment. W tym przypadku momentem czasu jest początek XXI w.: 0^h UT 1 stycznia 2001 r. (JD2451910,5). Jest to poniedziałek — z astrologicznego punktu widzenia: dzień Księżyca. Możemy mieć problem ze znalezieniem współrzędnych planet, Słońca i Księżyca dla wybranej daty (astrologowie posiadają odpowiednie tablice) dlatego trzeba będzie posłużyć się własnymi obliczeniami np. zgodnie z przepisami podanymi w rozdz. 6 albo według algorytmów Van Flanderina i Pulkinena (1979; por. też Borkowski 1988b) bądź Bretagnona i Simona (1986). Oto geocentryczne współrzędne równikowe i ekliptyczne:

Nr	Obiekt	α	δ	λ	β	Dzień tygodnia	Rządzony		ζ
		<i>h m s</i>	<i>° ' "</i>	<i>° ' "</i>	<i>° ' "</i>		znak	dom	
1	Słońce	18.4615	-23.0045	280.3758	0.0000	Niedziela	Leo	V	15
2	Księżyc	23.2556	-8.4930	348.4151	-4.4404	Poniedziałek	Can	IV	12
3	Merkury	19.0256	-24.3809	284.1645	-1.5827	Środa	Gem Vir	III	7
4	Wenus	21.5851	-13.5654	326.5749	-1.3058	Piątek	Tau Lib	II	7
5	Mars	14.1223	-11.5856	214.5635	1.1533	Wtorek	Ari Sco	I	7
6	Jowisz	4.0106	19.4828	62.1122	-0.4824	Czwartek	Sag Pis	IX	9
7	Saturn	3.3109	16.4701	54.3517	-2.1151	Sobota	Cap Aqu	X	9
8	Uran	21.2513	-15.5254	318.3915	-0.4052		Aqu	XI	7
9	Neptun	20.3040	-18.4557	305.2059	0.1013		Pis	XII	5
0	Pluton	16.5426	-12.0624	253.4225	10.2434		Sco	VIII	

Czas gwiazdowy obliczamy ze wzoru (3.3): $T_\star = 7^h 57^m = 119,27^\circ$, zaś nachylenie ekliptyki do równika z (2.20): $\epsilon = 23,4392^\circ$. Teraz możemy obliczyć długości ekliptyczne *Ascendentu* (punktu wschodzącego ekliptyki, λ_A) i *Medium Coeli* (punktu górującego, λ_{MC}):

$$\lambda_A = \arctan \frac{\cos T_\star}{-\sin \epsilon \tan \varphi - \cos \epsilon \sin T_\star} = 200,18^\circ \quad \lambda_{MC} = \arctan \frac{\sin T_\star}{\cos \epsilon \cos T_\star} = 117,21^\circ$$

(trzeba tutaj zwrócić uwagę na wybór właściwej ćwiartki dla \arctan , por. p. 2.3.4). *Descendent* (punkt zachodzący) i *Imum Coeli* (punkt dołujący ekliptyki) znajdują się naprzeciwko Ascendentu i Medium Coeli (o 180° więcej lub mniej).

Z powyższych danych można już ułożyć tabelę *aspektów*, tj. wzajemnych konfiguracji planet (w tym Słońca i Księżycy), Ascendentu i Medium Coeli. Podstawą do sporządzenia takiej tabeli są wzajemne odległości tych obiektów liczone wzdłuż ekliptyki (różnice długości ekliptycznych). Astrologicznie ważne są następujące aspekty albo konfiguracje (w nawiasie podajemy tolerancję odstępstwa pozwalającą traktować dany aspekt jako ścisły/luźny oraz, po średniku, wpływ aspektu: + — pozytywny, — — negatywny, +— — zmienny, ! — silny; podwojone znaki należy interpretować jak z przymiotnikiem „bardzo”):

koniunkcja ($0^\circ \div 5'/5^\circ$; +—!)
 półsekstyl ($30^\circ \pm 5'/3^\circ$; +)
 półkwadrat ($45^\circ \pm 5'/3^\circ$; —)
 sekstyl ($60^\circ \pm 5'/5^\circ$; +!)
 kwadratura ($90^\circ \pm 5'/5^\circ$; —!!)
 trygon ($120^\circ \pm 5'/5^\circ$; ++!!)
 półtorakwadrat ($135^\circ \pm 5'/3^\circ$; —)
 kwinkuns ($150^\circ \pm 5'/3^\circ$; +—)
 opozycja ($180^\circ \pm 5'/5^\circ$; ——!!)
 paralela ($|\Delta\delta| = 0^\circ \div 5'/3^\circ$; +—!) — aspekt deklinacyjny.

Tolerancję aspektów luźnych można powiększać w zależności od planet biorących udział w konfiguracji (dla danej pary bierzemy wtedy średnie wartości z dwóch poszerzeń ζ podanych w ostatniej kolumnie tabelki współrzędnych; podany tutaj schemat za Prengel, 1937, nie jest jednak uniwersalnie stosowany, np. Csaba 1986). Trzeba pamiętać także, że nie ma aspektów większych od 180° ani mniejszych od zera i jeśli z rachunku wychodzi wartość spoza tego przedziału to należy wziąć bądź wartość bezwzględną, bądź uzupełnienie do 360° . W naszym przypadku jest tylko jeden aspekt ścisły: Księżyc z Uranem tworzą półsekstyl ($\Delta\lambda = 30^\circ 2,5'$). Pozostałe, w liczbie około 30 nie licząc aspektów poszerzonych, to aspekty luźne. Mamy np. dla Księżycy: półtorakwadrat z Marsem, półkwadrat z Neptunem, opozycję z Plutonem i kwinkuns z Ascendentem, zaś dla Słońca: złączenie (tj. koniunkcję) z Merkurem, półkwadrat z Wenus i półtorakwadrat z Saturnem. Pośród aspektów deklinacyjnych (paralel) najściślej jest paralela Marsa z Plutonem ($|\Delta\delta| = 7'$).

Następnym krokiem liczenia może być zbadanie rozkładu planet na poszczególne *znaki zodiaku*. Każdy znak obejmuje obszar 30° w długości ekliptycznej poczynając od Barana ($0^\circ < \lambda < 30^\circ$), poprzez Byka ($30 - 60^\circ$) aż do Ryb ($330 - 360^\circ$). Stwierdzamy natychmiast, że w Wodniku znajdują się Wenus, Uran i Neptun, w Koziorożcu — Słońce i Merkury, zaś Księżyc w Rybach, Mars w Skorpionie, Jowisz w Bliźniętach a Saturn w Byku.

Z rozkładem na znaki zodiaku łączy się rozkład na *kwadraty (jakości)* i *żywioty (trygony)*: co trzeciemu znakowi przypisuje się ten sam kwadrat (kardynalny, stały lub zmienny) a co czwarty należy do tego samego żywiołu. W naszym przypadku obrazuje to tabelka, w której cyfrom od 0 do 9 odpowiadają planety według Nr z tabeli

współrzędnych (tutaj ostatnia kolumna i ostatni wiersz zawierają ilości planet w danym kwadracie lub żywiole, a nie numery):

Kwadraty↓	Trygony→	Ogień		Ziemia		Powietrze		Woda		suma
		+	-	+	-	+	-	+	-	
Kardynalny (Ari Cap Lib Can)				13						2
Stały (Leo Tau Aqu Sco)				7		489		5		5
Zmienny (Sag Vir Gem Pis)		0				6		2		3
	razem	1		3		4		2		

Z tabelki tej widać, że np. Wenus, Uran i Neptun będąc w Wodniku (w tabelkach skrót Aqu od Aquarius) są w żywiole powietrza (Lib czyli Waga, Aqu czyli Wodnik i Gem czyli Bliźnięta) i w kwadracie stałym (Leo czyli Lew, Tau czyli Byk, Wodnik i Sco czyli Skorpion). Ponadto, w astrologii co drugi znak liczy się jako pozytywny albo męski (żywioły ognisty i powietrzny, tj. Baran, Bliźnięta itd.), a pozostałe są negatywne (żeńskie). Mamy więc 5 planet w znakach pozytywnych i 5 w negatywnych.

Drugi (obok znaków zodiaku) astrologicznie ważny podział ekliptyki to tzw. *domy*. Jest ich 12: 6 nad horyzontem i 6 symetrycznie pod nim. Istnieje wiele szkół wyznaczania domów preferowanych przez różne autorytety (np. Prinke i Weres 1983). Chyba najpowszechniej stosuje się domy według *tabel Placidusa*. W tym schemacie Ascendent jest początkiem I-go domu, Imum Coeli — IV-tego, Descendent — VII-go, a Medium Coeli — X-tego. Pozostałe punkty rozdzielające domy wyznaczają 1/3 i 2/3 czasu rotacji dobowej Ascendentu do południka i Medium Coeli do południka przechodzącego przez Descendent. Inaczej mówiąc, aby uzyskać potrzebne punkty należy obliczyć kąty godzinne Ascendentu (t_A , biorąc go ujemnym, np. zamiast 270° do obliczeń bierzemy $-90^\circ = -6^h$) i Descendentu ($t_D = 180^\circ + t_A$) i podzielić na trzy. Otrzymane z podziału dwa dodatkowe kąty godzinne po obu stronach południka miejscowego wyznaczają początki brakujących domów. Całość można ująć w następujący algorytm (rachunek w stopniach):

$$t_D = \left(180 + T_\star - \arctan \frac{\cos \epsilon \sin \lambda_A}{\cos \lambda_A} \right) \bmod 360 \quad t_i = \frac{|10 - i|}{3} (t_D - 180 \operatorname{int} \frac{i}{11})$$

$$\lambda_{i-6} = 180 + \arctan \frac{\sin(T_\star - t_i)}{\cos(T_\star - t_i) \cos \epsilon} \quad \lambda_i = (\lambda_{i-6} + 180) \bmod 360,$$

gdzie i przyjmuje wartości od 7 do 12 (odpowiadające domom od VII do XII) i gdzie także stosuje się odpowiednie reguły wyboru ćwiartki dla funkcji \arctan (p. 2.3.4). W naszym przykładzie dostajemy następujące długości ekliptyczne początków domów (od I do XII; w stopniach): 200,18, 234,54, 266,07, 297,21, 323,39, 351,48, 20,18, 54,54, 86,07, 117,21, 143,39 i 171,48. Stwierdzamy teraz, że w domu I znajduje się Mars, w II — Pluton, w III — Słońce i Merkury, w IV — Uran i Neptun, w V — Księżyc i Wenus i w VIII — Jowisz i Saturn. Podsumowujemy jeszcze ilość planet pod horyzontem (8) i nad nim (2), ilość po wschodniej stronie nieba (4) i po zachodniej (6) i możemy rozpocząć interpretację otrzymanych wyników.

Rozdział 8

Materiały uzupełniające

8.1 Wybrane stałe

$c = 299792458 \text{ m/s}$	prędkość światła
$1 \text{ AU} = 1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ m}$	jednostka astronomiczna
$k = 0,01720209895 \text{ AU}^{3/2}/(\mathcal{M}_{\odot}^{1/2} \text{ d})$	stała grawitacji Gaussa
$G = k^2 = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	stała grawitacji Newtona
$= 2,959122083 \cdot 10^{-4} \text{ AU}^3/(\mathcal{M}_{\odot} \text{ d}^2)$	
$\mathcal{M}_{\odot} = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	masa Słońca
$\mathcal{M}_{\odot}/\mathcal{M}_{\oplus} = 332946,0$	stosunek masy Słońca do masy Ziemi
$\mu = 0,01230002 = 1/81,30068$	stosunek masy Księżyca do masy Ziemi
$\omega_{\oplus} = 7,2921151467 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$	prędkość rotacji Ziemi
$a = 6378140 \text{ m}$	równikowy promień Ziemi (IAU)
$= 6378137 \text{ m}$	(IUGG)
$f = 1/298,257$	splaszczenie elipsoidy ziemskiej: $1 - b^2/a^2 = f(2 - f)$
$= 1/298,257222101$	(IUGG)
$e^2 = 0,006694385$	kwadrat mimośrodu elipsoidy ziemskiej: $1 - b^2/a^2 = f(2 - f)$
$b = 6356755 \text{ m}$	mała półoś elipsoidy ziemskiej: $a(1 - f)$
$R = 6371012 \text{ m}$	średni promień Ziemi: $(2a + b)/3 = a(1 - f/3)$
$\pi = 3,141592653589793238462643383279\dots$	stała matematyczna (ludolfina)
$e = 2,718281828459045235360287471352\dots$	stała matematyczna
$dl/d\varphi = 111133,35 - 559,84 \cos 2\varphi + 1,17 \cos 4\varphi \text{ m/1}^\circ$	w szerokości geograficznej
$dl/d\lambda = 111413,28 \cos \varphi - 93,51 \cos 3\varphi + 0,12 \cos 5\varphi \text{ m/1}^\circ$	w długości
$= [111694,41 + (-376,44 + 1,92 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi] \cos \varphi$	

8.2 Kalendarz astronomiczny na rok 2000 (wyciąg)

Dane przedstawione na następnych stronach zostały obliczone za pomocą algorytmów opisanych w niniejszej pracy. Użyto m.in. programów **SOL** oraz **LUNE**. Z wyjątkiem *JD*, który odniesiony jest do południa daty, pozostałe dane obliczono na godz. 0 *UT*. *LAST0* jest czasem gwiazdowym południka $18,55^\circ$ (Toruń). Fazy Księżyca podano w dniach po kwadrze i w procentach oświetlenia tarczy.

Dzień r. m. tyg.	<i>JD</i> 2451	<i>LASTO</i> h m s	$\Delta\alpha$ m s	α_{\odot} h m s	δ_{\odot} ° ' "	\mathcal{R}_{\odot} AU	α_K h m s	δ_K ° ' "	\mathcal{R}_K R_{\oplus}	Faza K. d	K. %	
Styczeń												
1	1	Sob	545	7 54 03,2	-3 00 18	42 54	-23 04	0,983333	14 26 39	-8 59 62,860	2,4	27
2	2	Nie	546	7 57 59,8	-3 29 18	47 19	-22 60	0,983332	15 13 04	-12 41 63,295	3,4	19
3	3	Pon	547	8 01 56,3	-3 57 18	51 44	-22 54	0,983332	16 00 18	-15 50 63,572	4,4	12
4	4	Wto	548	8 05 52,9	-4 25 18	56 08	-22 49	0,983332	16 48 39	-18 20 63,704	5,4	7
5	5	Sro	549	8 09 49,5	-4 52 19	00 32	-22 43	0,983333	17 38 11	-20 02 63,706	6,4	3
6	6	Czw	550	8 13 46,0	-5 20 19	04 56	-22 36	0,983334	18 28 41	-20 53 63,598	7,4	1
7	7	Pią	551	8 17 42,6	-5 46 19	09 19	-22 29	0,983335	19 19 43	-20 47 63,393	0,2	Nów
8	8	Sob	552	8 21 39,1	-6 12 19	13 42	-22 21	0,983337	20 10 46	-19 45 63,102	1,2	1
9	9	Nie	553	8 25 35,7	-6 38 19	18 04	-22 14	0,983339	21 01 21	-17 48 62,730	2,2	5
10	10	Pon	554	8 29 32,3	-7 03 19	22 26	-22 05	0,98341	21 51 12	-15 02 62,277	3,2	9
11	11	Wto	555	8 33 28,8	-7 28 19	26 47	-21 56	0,98344	22 40 18	-11 34 61,743	4,2	16
12	12	Sro	556	8 37 25,4	-7 52 19	31 08	-21 47	0,98347	23 28 55	-7 31 61,127	5,2	24
13	13	Czw	557	8 41 21,9	-8 15 19	35 27	-21 38	0,98351	0 17 32	-3 03 60,434	6,2	33
14	14	Pią	558	8 45 18,5	-8 38 19	39 47	-21 28	0,98355	1 06 52	1 39 59,681	7,2	44
15	15	Sob	559	8 49 15,0	-9 00 19	44 05	-21 17	0,98360	1 57 42	6 24 58,895	0,4	1Kw
16	16	Nie	560	8 53 11,6	-9 21 19	48 23	-21 06	0,98365	2 50 54	10 56 58,120	1,4	66
17	17	Pon	561	8 57 08,1	-9 42 19	52 41	-20 55	0,98371	3 47 08	14 59 57,414	2,4	76
18	18	Wto	562	9 01 04,7	-10 02 19	56 57	-20 43	0,98377	4 46 43	18 13 56,841	3,4	86
19	19	Sro	563	9 05 01,3	-10 22 20	01 13	-20 31	0,98384	5 49 16	20 17 56,466	4,4	93
20	20	Czw	564	9 08 57,8	-10 40 20	05 28	-20 19	0,98392	6 53 36	20 56 56,343	5,4	98
21	21	Pią	565	9 12 54,4	-10 58 20	09 43	-20 06	0,98400	7 57 52	20 06 56,499	6,4	100
22	22	Sob	566	9 16 50,9	-11 15 20	13 56	-19 53	0,98409	9 00 16	17 52 56,930	0,8	Pełnia
23	23	Nie	567	9 20 47,5	-11 31 20	18 09	-19 39	0,98418	9 59 32	14 30 57,602	1,8	95
24	24	Pon	568	9 24 44,1	-11 47 20	22 21	-19 25	0,98428	10 55 16	10 23 58,452	2,8	89
25	25	Wto	569	9 28 40,6	-12 02 20	26 33	-19 11	0,98439	11 47 43	5 50 59,404	3,8	82
26	26	Sro	570	9 32 37,2	-12 16 20	30 43	-18 56	0,98450	12 37 34	1 09 60,376	4,8	73
27	27	Czw	571	9 36 33,7	-12 29 20	34 53	-18 41	0,98462	13 25 38	-3 25 61,295	5,8	63
28	28	Pią	572	9 40 30,3	-12 41 20	39 02	-18 26	0,98474	14 12 44	-7 44 62,101	6,8	53
29	29	Sob	573	9 44 26,8	-12 53 20	43 10	-18 10	0,98487	14 59 36	-11 37 62,751	0,7	3Kw
30	30	Nie	574	9 48 23,4	-13 04 20	47 18	-17 54	0,98500	15 46 53	-14 58 63,219	1,7	34
31	31	Pon	575	9 52 19,9	-13 14 20	51 24	-17 38	0,98514	16 34 60	-17 40 63,498	2,7	26
Luty												
32	1	Wto	576	9 56 16,5	-13 23 20	55 30	-17 21	0,98528	17 24 10	-19 37 63,593	3,7	18
33	2	Sro	577	10 00 13,0	-13 32 20	59 35	-17 04	0,98542	18 14 21	-20 43 63,524	4,7	11
34	3	Czw	578	10 04 09,6	-13 40 21	03 40	-16 47	0,98557	19 05 19	-20 54 63,314	5,7	6
35	4	Pią	579	10 08 06,2	-13 46 21	07 43	-16 29	0,98572	19 56 35	-20 07 62,995	6,7	2
36	5	Sob	580	10 12 02,7	-13 53 21	11 46	-16 12	0,98587	20 47 43	-18 25 62,594	7,7	0
37	6	Nie	581	10 15 59,3	-13 58 21	15 47	-15 54	0,98603	21 38 19	-15 50 62,137	0,5	Nów
38	7	Pon	582	10 19 55,8	-14 02 21	19 48	-15 35	0,98619	22 28 12	-12 28 61,645	1,5	2
39	8	Wto	583	10 23 52,4	-14 06 21	23 49	-15 17	0,98635	23 17 26	-8 30 61,130	2,5	6
40	9	Sro	584	10 27 48,9	-14 09 21	27 48	-14 58	0,98651	0 06 22	-4 05 60,600	3,5	12
41	10	Czw	585	10 31 45,5	-14 11 21	31 46	-14 38	0,98668	0 55 31	0 36 60,059	4,5	20
42	11	Pią	586	10 35 42,0	-14 12 21	35 44	-14 19	0,98685	1 45 34	5 19 59,511	5,5	29
43	12	Sob	587	10 39 38,6	-14 12 21	39 41	-13 59	0,98703	2 37 14	9 52 58,964	6,5	39
44	13	Nie	588	10 43 35,1	-14 12 21	43 37	-13 40	0,98721	3 31 12	13 58 58,436	0,0	1Kw
45	14	Pon	589	10 47 31,7	-14 11 21	47 33	-13 19	0,98739	4 27 55	17 21 57,951	1,0	62
46	15	Wto	590	10 51 28,3	-14 09 21	51 28	-12 59	0,98758	5 27 25	19 45 57,547	2,0	72
47	16	Sro	591	10 55 24,8	-14 06 21	55 21	-12 39	0,98777	6 29 03	20 53 57,265	3,0	82
48	17	Czw	592	10 59 21,4	-14 03 21	59 15	-12 18	0,98796	7 31 36	20 38 57,149	4,0	90
49	18	Pią	593	11 03 17,9	-13 59 22	03 07	-11 57	0,98816	8 33 31	18 60 57,231	5,0	96
50	19	Sob	594	11 07 14,5	-13 54 22	06 59	-11 36	0,98837	9 33 29	16 07 57,526	6,0	99
51	20	Nie	595	11 11 11,0	-13 48 22	10 50	-11 15	0,98858	10 30 42	12 17 58,028	0,3	Pełnia
52	21	Pon	596	11 15 07,6	-13 42 22	14 40	-10 53	0,98879	11 25 00	7 49 58,704	1,3	98
53	22	Wto	597	11 19 04,1	-13 35 22	18 30	-10 31	0,98901	12 16 45	3 04 59,503	2,3	93
54	23	Sro	598	11 23 00,7	-13 28 22	22 19	-10 10	0,98924	13 06 32	-1 41 60,360	3,3	87
55	24	Czw	599	11 26 57,2	-13 20 22	26 08	-9 48	0,98947	13 55 02	-6 14 61,206	4,3	79
56	25	Pią	600	11 30 53,8	-13 11 22	29 55	-9 26	0,98970	14 42 57	-10 23 61,977	5,3	70
57	26	Sob	601	11 34 50,3	-13 02 22	33 43	-9 03	0,98994	15 30 53	-14 00 62,617	6,3	61
58	27	Nie	602	11 38 46,9	-12 52 22	37 30	-8 41	0,99018	16 19 17	-16 58 63,088	7,3	52
59	28	Pon	603	11 42 43,4	-12 42 22	41 16	-8 18	0,99042	17 08 25	-19 11 63,363	0,8	3Kw
60	29	Wto	604	11 46 40,0	-12 31 22	45 01	-7 56	0,99066	17 58 23	-20 33 63,436	1,8	33
Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza		

Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza K.
r. m. tyg.	2451	h m s	m s	h m s	° ' "	AU	h m s	° ' "	R_{\oplus}	d %
Marzec										
61	1	Śro	605 11 50 36,6	-12 20 22 48 47	-7 33 0,99091	18 49 04	-21 01 63,315	2,8	24	
62	2	Czw	606 11 54 33,1	-12 08 22 52 31	-7 10 0,99116	19 40 11	-20 32 63,022	3,8	17	
63	3	Pia	607 11 58 29,7	-11 56 22 56 16	-6 47 0,99141	20 31 21	-19 06 62,590	4,8	10	
64	4	Sob	608 12 02 26,2	-11 43 22 59 59	-6 24 0,99166	21 22 17	-16 46 62,058	5,8	5	
65	5	Nie	609 12 06 22,8	-11 30 23 03 43	-6 01 0,99192	22 12 45	-13 35 61,470	6,8	2	
66	6	Pon	610 12 10 19,3	-11 16 23 07 26	-5 38 0,99217	23 02 45	-9 43 60,867	7,8	0	
67	7	Wto	611 12 14 15,9	-11 02 23 11 08	-5 14 0,99243	23 52 32	-5 18 60,286	0,8	Nów	
68	8	Sro	612 12 18 12,4	-10 47 23 14 50	-4 51 0,99268	0 42 27	-0 34 59,752	1,8	4	
69	9	Czw	613 12 22 09,0	-10 32 23 18 32	-4 28 0,99294	1 33 04	4 17 59,283	2,8	9	
70	10	Pia	614 12 26 05,5	-10 17 23 22 13	-4 04 0,99320	2 24 59	8 58 58,885	3,8	16	
71	11	Sob	615 12 30 02,1	-10 02 23 25 54	-3 41 0,99346	3 18 45	13 15 58,558	4,8	25	
72	12	Nie	616 12 33 58,6	-9 46 23 29 35	-3 17 0,99372	4 14 43	16 49 58,298	5,8	35	
73	13	Pon	617 12 37 55,2	-9 30 23 33 15	-2 53 0,99398	5 12 56	19 27 58,105	6,8	47	
74	14	Wto	618 12 41 51,7	-9 13 23 36 55	-2 30 0,99424	6 12 56	20 53 57,982	0,7	1Kw	
75	15	Sro	619 12 45 48,3	-8 56 23 40 35	-2 06 0,99451	7 13 44	20 59 57,938	1,7	69	
76	16	Czw	620 12 49 44,9	-8 39 23 44 15	-1 42 0,99478	8 14 10	19 46 57,990	2,7	79	
77	17	Pia	621 12 53 41,4	-8 22 23 47 54	-1 19 0,99505	9 13 07	17 18 58,155	3,7	88	
78	18	Sob	622 12 57 38,0	-8 05 23 51 33	-0 55 0,99532	10 09 52	13 49 58,445	4,7	94	
79	19	Nie	623 13 01 34,5	-7 47 23 55 12	-0 31 0,99560	11 04 12	9 36 58,865	5,7	98	
80	20	Pon	624 13 05 31,1	-7 29 23 58 51	-0 08 0,99587	11 56 19	4 57 59,406	6,7	100	
81	21	Wto	625 13 09 27,6	-7 11 0 02 29	0 16 0,99615	12 46 41	0 08 60,042	0,8	Pełnia	
82	22	Sro	626 13 13 24,1	-6 53 0 06 08	0 40 0,99644	13 35 52	-4 36 60,735	1,8	96	
83	23	Czw	627 13 17 20,7	-6 35 0 09 46	1 04 0,99672	14 24 29	-9 00 61,436	2,8	91	
84	24	Pia	628 13 21 17,2	-6 17 0 13 25	1 27 0,99701	15 13 01	-12 55 62,093	3,8	85	
85	25	Sob	629 13 25 13,8	-5 59 0 17 03	1 51 0,99730	16 01 53	-16 12 62,653	4,8	77	
86	26	Nie	630 13 29 10,4	-5 41 0 20 41	2 14 0,99759	16 51 19	-18 43 63,072	5,8	69	
87	27	Pon	631 13 33 06,9	-5 22 0 24 20	2 38 0,99788	17 41 22	-20 24 63,315	6,8	60	
88	28	Wto	632 13 37 03,5	-5 04 0 27 58	3 01 0,99817	18 31 57	-21 10 63,360	7,8	50	
89	29	Sro	633 13 41 00,0	-4 46 0 31 37	3 25 0,99846	19 22 50	-21 00 63,202	1,0	3Kw	
90	30	Czw	634 13 44 56,6	-4 28 0 35 15	3 48 0,99876	20 13 44	-19 53 62,850	2,0	32	
91	31	Pia	635 13 48 53,1	-4 10 0 38 54	4 11 0,99905	21 04 24	-17 51 62,331	3,0	23	
Kwiecień										
92	1	Sob	636 13 52 49,7	-3 52 0 42 32	4 34 0,99934	21 54 44	-14 56 61,683	4,0	15	
93	2	Nie	637 13 56 46,2	-3 35 0 46 11	4 58 0,99963	22 44 45	-11 16 60,956	5,0	9	
94	3	Pon	638 14 00 42,8	-3 17 0 49 50	5 21 0,99992	23 34 43	-6 58 60,205	6,0	4	
95	4	Wto	639 14 04 39,3	-2 60 0 53 29	5 44 1,00021	0 25 01	-2 13 59,489	7,0	1	
96	5	Sro	640 14 08 35,9	-2 42 0 57 09	6 06 1,00050	1 16 10	2 45 58,859	0,2	Nów	
97	6	Czw	641 14 12 32,4	-2 25 1 00 48	6 29 1,00078	2 08 44	7 40 58,353	1,2	2	
98	7	Pia	642 14 16 29,0	-2 08 1 04 28	6 52 1,00107	3 03 14	12 15 57,997	2,2	6	
99	8	Sob	643 14 20 25,5	-1 52 1 08 08	7 14 1,00135	3 59 57	16 11 57,795	3,2	13	
100	9	Nie	644 14 24 22,1	-1 35 1 11 48	7 37 1,00163	4 58 50	19 09 57,738	4,2	22	
101	10	Pon	645 14 28 18,7	-1 19 1 15 28	7 59 1,00191	5 59 17	20 54 57,807	5,2	32	
102	11	Wto	646 14 32 15,2	-1 03 1 19 09	8 21 1,00219	7 00 17	21 19 57,978	6,2	44	
103	12	Sro	647 14 36 11,8	-0 47 1 22 50	8 43 1,00246	8 00 36	20 23 58,228	0,4	1Kw	
104	13	Czw	648 14 40 08,3	-0 32 1 26 31	9 05 1,00274	8 59 10	18 12 58,542	1,4	66	
105	14	Pia	649 14 44 04,9	-0 17 1 30 12	9 26 1,00302	9 55 22	14 59 58,909	2,4	76	
106	15	Sob	650 14 48 01,4	-0 02 1 33 54	9 48 1,00329	10 49 04	10 60 59,325	3,4	85	
107	16	Nie	651 14 51 58,0	0 12 1 37 36	10 09 1,00357	11 40 35	6 29 59,788	4,4	92	
108	17	Pon	652 14 55 54,5	0 27 1 41 18	10 30 1,00384	12 30 26	1 44 60,295	5,4	97	
109	18	Wto	653 14 59 51,1	0 40 1 45 01	10 51 1,00412	13 19 13	-3 02 60,837	6,4	99	
110	19	Sro	654 15 03 47,6	0 54 1 48 45	11 12 1,00439	14 07 33	-7 36 61,397	0,3	Pełnia	
111	20	Czw	655 15 07 44,2	1 06 1 52 28	11 33 1,00467	14 55 58	-11 44 61,950	1,3	98	
112	21	Pia	656 15 11 40,7	1 19 1 56 12	11 53 1,00495	15 44 50	-15 18 62,464	2,3	95	
113	22	Sob	657 15 15 37,3	1 31 1 59 57	12 14 1,00522	16 34 22	-18 09 62,902	3,3	90	
114	23	Nie	658 15 19 33,8	1 43 2 03 42	12 34 1,00550	17 24 33	-20 10 63,227	4,3	83	
115	24	Pon	659 15 23 30,4	1 54 2 07 27	12 53 1,00577	18 15 14	-21 16 63,405	5,3	75	
116	25	Wto	660 15 27 27,0	2 04 2 11 13	13 13 1,00604	19 06 06	-21 26 63,407	6,3	67	
117	26	Sro	661 15 31 23,5	2 14 2 14 60	13 33 1,00632	19 56 50	-20 38 63,219	7,3	58	
118	27	Czw	662 15 35 20,1	2 24 2 18 47	13 52 1,00659	20 47 09	-18 54 62,836	0,2	3Kw	
119	28	Pia	663 15 39 16,6	2 33 2 22 34	14 11 1,00685	21 36 58	-16 18 62,271	1,2	39	
120	29	Sob	664 15 43 13,2	2 41 2 26 22	14 29 1,00712	22 26 21	-12 55 61,553	2,2	29	
121	30	Nie	665 15 47 09,7	2 49 2 30 11	14 48 1,00738	23 15 35	-8 51 60,725	3,2	20	
Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza

Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza K.	
r. m. tyg.	2451	h m s	m s	h m s	° ′	AU	h m s	° ′	R_{\oplus}	d %	
Maj											
122	1	Pon	666 15 51 06,3	2 57	2 33 60	15 06	1,00764	0 05 09	-4 16 59,846	4,2	13
123	2	Wto	667 15 55 02,8	3 04	2 37 50	15 24	1,00790	0 55 40	0 41 58,984	5,2	6
124	3	Sro	668 15 58 59,4	3 10	2 41 40	15 42	1,00815	1 47 49	5 44 58,208	6,2	2
125	4	Czw	669 16 02 55,9	3 16	2 45 31	15 59	1,00840	2 42 12	10 37 57,582	7,2	0
126	5	Pia	670 16 06 52,5	3 21	2 49 22	16 17	1,00864	3 39 18	14 58 57,156	0,8	Nów
127	6	Sob	671 16 10 49,0	3 26	2 53 14	16 34	1,00888	4 39 07	18 27 56,956	1,8	5
128	7	Nie	672 16 14 45,6	3 30	2 57 06	16 50	1,00912	5 41 03	20 43 56,981	2,8	11
129	8	Pon	673 16 18 42,2	3 34	3 00 59	17 07	1,00935	6 43 53	21 35 57,209	3,8	20
130	9	Wto	674 16 22 38,7	3 37	3 04 53	17 23	1,00958	7 46 02	20 59 57,601	4,8	30
131	10	Sro	675 16 26 35,3	3 39	3 08 47	17 39	1,00981	8 46 07	19 03 58,109	5,8	41
132	11	Czw	676 16 30 31,8	3 41	3 12 41	17 54	1,01003	9 43 20	16 01 58,687	0,2	1Kw
133	12	Pia	677 16 34 28,4	3 42	3 16 37	18 09	1,01025	10 37 30	12 09 59,296	1,2	63
134	13	Sob	678 16 38 24,9	3 43	3 20 32	18 24	1,01046	11 28 60	7 45 59,907	2,2	73
135	14	Nie	679 16 42 21,5	3 43	3 24 29	18 39	1,01068	12 18 28	3 03 60,501	3,2	82
136	15	Pon	680 16 46 18,0	3 43	3 28 26	18 53	1,01089	13 06 38	-1 42 61,069	4,2	89
137	16	Wto	681 16 50 14,6	3 42	3 32 23	19 07	1,01110	13 54 15	-6 19 61,603	5,2	95
138	17	Sro	682 16 54 11,1	3 41	3 36 21	19 21	1,01131	14 41 57	-10 35 62,099	6,2	98
139	18	Czw	683 16 58 07,7	3 39	3 40 19	19 34	1,01151	15 30 13	-14 21 62,549	7,2	100
140	19	Pia	684 17 02 04,3	3 36	3 44 18	19 47	1,01172	16 19 18	-17 28 62,940	0,7	Pełnia
141	20	Sob	685 17 06 00,8	3 33	3 48 18	19 60	1,01192	17 09 16	-19 47 63,254	1,7	97
142	21	Nie	686 17 09 57,4	3 30	3 52 18	20 12	1,01212	17 59 56	-21 12 63,470	2,7	93
143	22	Pon	687 17 13 54,0	3 26	3 56 19	20 24	1,01232	18 50 53	-21 40 63,563	3,7	88
144	23	Wto	688 17 17 50,5	3 21	4 00 20	20 36	1,01251	19 41 42	-21 11 63,511	4,7	81
145	24	Sro	689 17 21 47,1	3 16	4 04 22	20 47	1,01270	20 31 58	-19 45 63,295	5,7	73
146	25	Czw	690 17 25 43,6	3 10	4 08 24	20 58	1,01289	21 21 29	-17 27 62,902	6,7	64
147	26	Pia	691 17 29 40,2	3 04	4 12 27	21 08	1,01308	22 10 15	-14 21 62,335	7,7	55
148	27	Sob	692 17 33 36,7	2 57	4 16 30	21 19	1,01326	22 58 32	-10 34 61,607	0,5	3Kw
149	28	Nie	693 17 37 33,3	2 50	4 20 34	21 28	1,01344	23 46 49	-6 13 60,750	1,5	35
150	29	Pon	694 17 41 29,8	2 42	4 24 38	21 38	1,01361	0 35 46	-1 28 59,812	2,5	25
151	30	Wto	695 17 45 26,4	2 34	4 28 43	21 47	1,01378	1 26 10	3 31 58,856	3,5	16
152	31	Sro	696 17 49 22,9	2 25	4 32 48	21 56	1,01394	2 18 51	8 30 57,958	4,5	9
Czerwiec											
153	1	Czw	697 17 53 19,5	2 16	4 36 54	22 04	1,01410	3 14 32	13 09 57,196	5,5	3
154	2	Pia	698 17 57 16,1	2 07	4 40 60	22 12	1,01425	4 13 37	17 08 56,641	6,5	0
155	3	Sob	699 18 01 12,6	1 57	4 45 06	22 19	1,01440	5 15 52	20 02 56,344	0,5	Nów
156	4	Nie	700 18 05 09,2	1 47	4 49 13	22 26	1,01454	6 20 11	21 32 56,327	1,5	3
157	5	Pon	701 18 09 05,7	1 36	4 53 20	22 33	1,01467	7 24 49	21 30 56,582	2,5	9
158	6	Wto	702 18 13 02,3	1 25	4 57 27	22 40	1,01480	8 27 49	19 58 57,070	3,5	17
159	7	Sro	703 18 16 58,9	1 14	5 01 35	22 46	1,01493	9 27 47	17 10 57,732	4,5	27
160	8	Czw	704 18 20 55,4	1 03	5 05 43	22 51	1,01505	10 24 11	13 24 58,502	5,5	37
161	9	Pia	705 18 24 52,0	0 51	5 09 51	22 56	1,01516	11 17 13	9 01 59,315	6,5	48
162	10	Sob	706 18 28 48,5	0 39	5 13 60	23 01	1,01527	12 07 31	4 19 60,118	0,9	1Kw
163	11	Nie	707 18 32 45,1	0 27	5 18 08	23 05	1,01538	12 55 57	-0 28 60,871	1,9	69
164	12	Pon	708 18 36 41,6	0 15	5 22 17	23 09	1,01548	13 43 23	-5 08 61,548	2,9	78
165	13	Wto	709 18 40 38,2	0 03	5 26 26	23 13	1,01558	14 30 34	-9 30 62,135	3,9	86
166	14	Sro	710 18 44 34,7	-0 10	5 30 35	23 16	1,01568	15 18 10	-13 24 62,629	4,9	92
167	15	Czw	711 18 48 31,3	-0 23	5 34 44	23 19	1,01577	16 06 35	-16 42 63,028	5,9	97
168	16	Pia	712 18 52 27,9	-0 35	5 38 54	23 21	1,01586	16 56 01	-19 15 63,333	6,9	99
169	17	Sob	713 18 56 24,4	-0 48	5 43 03	23 23	1,01594	17 46 21	-20 57 63,544	0,1	Pełnia
170	18	Nie	714 19 00 21,0	-1 01	5 47 13	23 24	1,01602	18 37 14	-21 43 63,656	1,1	99
171	19	Pon	715 19 04 17,6	-1 14	5 51 22	23 25	1,01610	19 28 11	-21 30 63,660	2,1	96
172	20	Wto	716 19 08 14,1	-1 27	5 55 32	23 26	1,01618	20 18 41	-20 20 63,545	3,1	92
173	21	Sro	717 19 12 10,7	-1 40	5 59 41	23 26	1,01625	21 08 20	-18 17 63,297	4,1	86
174	22	Czw	718 19 16 07,2	-1 53	6 03 51	23 26	1,01632	21 56 60	-15 25 62,907	5,1	79
175	23	Pia	719 19 20 03,8	-2 06	6 08 00	23 26	1,01638	22 44 49	-11 52 62,368	6,1	70
176	24	Sob	720 19 24 00,3	-2 19	6 12 10	23 25	1,01644	23 32 10	-7 45 61,685	7,1	61
177	25	Nie	721 19 27 56,9	-2 32	6 16 19	23 23	1,01650	0 19 40	-3 13 60,874	8,1	50
178	26	Pon	722 19 31 53,4	-2 44	6 20 28	23 21	1,01655	1 08 06	1 36 59,967	1,0	3Kw
179	27	Wto	723 19 35 50,0	-2 57	6 24 37	23 19	1,01659	1 58 21	6 29 59,015	2,0	30
180	28	Sro	724 19 39 46,5	-3 09	6 28 46	23 16	1,01663	2 51 19	11 13 58,082	3,0	20
181	29	Czw	725 19 43 43,1	-3 21	6 32 55	23 13	1,01666	3 47 44	15 28 57,244	4,0	11
182	30	Pia	726 19 47 39,7	-3 34	6 37 04	23 10	1,01669	4 47 55	18 52 56,581	5,0	5
Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza	

Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza K.	
r. m. tyg.	2451	h m s	m s	h m s	° ' "	AU	h m s	° ' "	R_{\oplus}	d %	
Lipiec											
183	1	Sob	727 19 51 36,2	-3 45	6 41 12	23 06	1,01671	5 51 25	21 03 56,161	6,0	1
184	2	Nie	728 19 55 32,8	-3 57	6 45 20	23 02	1,01673	6 56 50	21 44 56,030	0,2	Nów
185	3	Pon	729 19 59 29,4	-4 08	6 49 28	22 57	1,01674	8 02 04	20 50 56,203	1,2	2
186	4	Wto	730 20 03 25,9	-4 19	6 53 36	22 52	1,01674	9 05 10	18 27 56,657	2,2	7
187	5	Sro	731 20 07 22,5	-4 30	6 57 43	22 47	1,01674	10 04 49	14 54 57,342	3,2	14
188	6	Czw	732 20 11 19,0	-4 40	7 01 50	22 41	1,01673	11 00 44	10 34 58,186	4,2	24
189	7	Pia	733 20 15 15,6	-4 50	7 05 56	22 34	1,01672	11 53 17	5 48 59,111	5,2	34
190	8	Sob	734 20 19 12,1	-4 59	7 10 02	22 28	1,01670	12 43 18	0 54 60,044	6,2	44
191	9	Nie	735 20 23 08,7	-5 09	7 14 08	22 21	1,01667	13 31 39	-3 54 60,925	0,5	1Kw
192	10	Pon	736 20 27 05,2	-5 17	7 18 13	22 13	1,01664	14 19 13	-8 24 61,710	1,5	65
193	11	Wto	737 20 31 01,8	-5 25	7 22 18	22 05	1,01661	15 06 46	-12 27 62,371	2,5	74
194	12	Sro	738 20 34 58,3	-5 33	7 26 22	21 57	1,01657	15 54 51	-15 55 62,895	3,5	82
195	13	Czw	739 20 38 54,9	-5 40	7 30 26	21 49	1,01653	16 43 49	-18 40 63,280	4,5	89
196	14	Pia	740 20 42 51,5	-5 47	7 34 29	21 40	1,01648	17 33 44	-20 35 63,533	5,5	94
197	15	Sob	741 20 46 48,0	-5 53	7 38 32	21 30	1,01643	18 24 24	-21 36 63,663	6,5	98
198	16	Nie	742 20 50 44,6	-5 59	7 42 34	21 21	1,01638	19 15 22	-21 39 63,679	7,5	100
199	17	Pon	743 20 54 41,2	-6 04	7 46 36	21 11	1,01633	20 06 06	-20 43 63,590	0,4	Pełnia
200	18	Wto	744 20 58 37,7	-6 09	7 50 37	21 00	1,01627	20 56 09	-18 53 63,400	1,4	98
201	19	Sro	745 21 02 34,3	-6 13	7 54 38	20 50	1,01620	21 45 11	-16 12 63,108	2,4	95
202	20	Czw	746 21 06 30,8	-6 17	7 58 38	20 39	1,01614	22 33 12	-12 49 62,712	3,4	90
203	21	Pia	747 21 10 27,4	-6 20	8 02 38	20 27	1,01607	23 20 26	-8 51 62,209	4,4	83
204	22	Sob	748 21 14 23,9	-6 22	8 06 37	20 15	1,01599	0 07 20	-4 27 61,599	5,4	75
205	23	Nie	749 21 18 20,5	-6 24	8 10 35	20 03	1,01592	0 54 37	0 14 60,889	6,4	65
206	24	Pon	750 21 22 17,0	-6 26	8 14 33	19 51	1,01583	1 43 04	5 00 60,095	7,4	55
207	25	Wto	751 21 26 13,6	-6 27	8 18 31	19 38	1,01575	2 33 34	9 41 59,249	0,5	3Kw
208	26	Sro	752 21 30 10,1	-6 27	8 22 28	19 25	1,01566	3 26 58	13 59 58,396	1,5	33
209	27	Czw	753 21 34 06,7	-6 27	8 26 24	19 11	1,01556	4 23 55	17 39 57,596	2,5	23
210	28	Pia	754 21 38 03,3	-6 26	8 30 19	18 58	1,01546	5 24 30	20 18 56,920	3,5	14
211	29	Sob	755 21 41 59,8	-6 24	8 34 15	18 44	1,01535	6 28 03	21 38 56,436	4,5	7
212	30	Nie	756 21 45 56,4	-6 22	8 38 09	18 29	1,01524	7 33 00	21 26 56,203	5,5	2
213	31	Pon	757 21 49 52,9	-6 20	8 42 03	18 15	1,01512	8 37 23	19 40 56,255	6,5	0
Sierpień											
214	1	Wto	758 21 53 49,5	-6 16	8 45 56	17 60	1,01499	9 39 24	16 33 56,595	0,9	Nów
215	2	Sro	759 21 57 46,1	-6 12	8 49 49	17 44	1,01486	10 38 08	12 25 57,192	1,9	5
216	3	Czw	760 22 01 42,6	-6 08	8 53 41	17 29	1,01473	11 33 27	7 39 57,988	2,9	12
217	4	Pia	761 22 05 39,2	-6 03	8 57 32	17 13	1,01459	12 25 49	2 37 58,909	3,9	20
218	5	Sob	762 22 09 35,7	-5 57	9 01 23	16 57	1,01444	13 16 02	-2 23 59,875	4,9	29
219	6	Nie	763 22 13 32,3	-5 51	9 05 13	16 40	1,01429	14 04 57	-7 07 60,812	5,9	39
220	7	Pon	764 22 17 28,8	-5 44	9 09 03	16 24	1,01413	14 53 19	-11 23 61,660	6,9	50
221	8	Wto	765 22 21 25,4	-5 36	9 12 52	16 07	1,01397	15 41 48	-15 04 62,376	1,0	1Kw
222	9	Sro	766 22 25 21,9	-5 28	9 16 40	15 50	1,01381	16 30 50	-18 02 62,932	2,0	69
223	10	Czw	767 22 29 18,5	-5 19	9 20 28	15 32	1,01364	17 20 37	-20 12 63,318	3,0	77
224	11	Pia	768 22 33 15,0	-5 10	9 24 15	15 14	1,01347	18 11 06	-21 27 63,537	4,0	85
225	12	Sob	769 22 37 11,6	-4 60	9 28 02	14 57	1,01329	19 02 00	-21 44 63,600	5,0	91
226	13	Nie	770 22 41 08,2	-4 49	9 31 48	14 38	1,01312	19 52 52	-21 03 63,526	6,0	96
227	14	Pon	771 22 45 04,7	-4 38	9 35 33	14 20	1,01294	20 43 16	-19 26 63,335	7,0	99
228	15	Wto	772 22 49 01,3	-4 27	9 39 18	14 01	1,01276	21 32 49	-16 56 63,049	8,0	100
229	16	Sro	773 22 52 57,8	-4 14	9 43 03	13 42	1,01257	22 21 23	-13 41 62,683	0,8	Pełnia
230	17	Czw	774 22 56 54,4	-4 02	9 46 47	13 23	1,01239	23 09 06	-9 48 62,251	1,8	97
231	18	Pia	775 23 00 50,9	-3 49	9 50 30	13 04	1,01220	23 56 18	-5 27 61,760	2,8	93
232	19	Sob	776 23 04 47,5	-3 35	9 54 13	12 45	1,01200	0 43 29	-0 48 61,215	3,8	86
233	20	Nie	777 23 08 44,0	-3 21	9 57 55	12 25	1,01181	1 31 22	3 58 60,620	4,8	78
234	21	Pon	778 23 12 40,6	-3 06	10 01 37	12 05	1,01161	2 20 43	8 38 59,983	5,8	69
235	22	Wto	779 23 16 37,1	-2 51	10 05 19	11 45	1,01141	3 12 17	12 59 59,318	6,8	59
236	23	Sro	780 23 20 33,7	-2 36	10 08 60	11 25	1,01121	4 06 46	16 46 58,649	0,2	3Kw
237	24	Czw	781 23 24 30,2	-2 20	10 12 40	11 04	1,01100	5 04 27	19 40 58,011	1,2	36
238	25	Pia	782 23 28 26,8	-2 04	10 16 21	10 44	1,01079	6 05 07	21 24 57,453	2,2	26
239	26	Sob	783 23 32 23,4	-1 47	10 20 01	10 23	1,01058	7 07 50	21 46 57,025	3,2	16
240	27	Nie	784 23 36 19,9	-1 30	10 23 40	10 02	1,01036	8 11 03	20 37 56,782	4,2	8
241	28	Pon	785 23 40 16,5	-1 12	10 27 19	9 41	1,01014	9 13 09	18 03 56,763	5,2	3
242	29	Wto	786 23 44 13,0	-0 55	10 30 58	9 20	1,00991	10 12 55	14 18 56,988	6,2	0
243	30	Sro	787 23 48 09,6	-0 36	10 34 36	8 58	1,00968	11 09 51	9 43 57,452	0,6	Nów
244	31	Czw	788 23 52 06,1	-0 18	10 38 15	8 37	1,00945	12 04 04	4 40 58,121	1,6	3

Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza K.
r. m. tyg.	2451	h m s	m s	h m s	° ′	AU	h m s	° ′	R_{\oplus}	d %
Wrzesień										
245	1	Pia	789	23 56 02,7	0 01 10 41 52	8 15 1,00921	12 56 04	-0 31 58,939	2,6	9
246	2	Sob	790	23 59 59,2	0 20 10 45 30	7 53 1,00897	13 46 33	-5 30 59,835	3,6	16
247	3	Nie	791	0 03 55,8	0 39 10 49 07	7 31 1,00872	14 36 13	-10 05 60,737	4,6	24
248	4	Pon	792	0 07 52,3	0 59 10 52 44	7 09 1,00847	15 25 40	-14 05 61,578	5,6	34
249	5	Wto	793	0 11 48,9	1 19 10 56 21	6 47 1,00821	16 15 21	-17 21 62,300	6,6	43
250	6	Sro	794	0 15 45,4	1 39 10 59 57	6 24 1,00796	17 05 31	-19 47 62,864	0,3	1Kw
251	7	Czw	795	0 19 42,0	1 59 11 03 33	6 02 1,00770	17 56 11	-21 19 63,245	1,3	62
252	8	Pia	796	0 23 38,5	2 20 11 07 09	5 40 1,00744	18 47 09	-21 53 63,436	2,3	71
253	9	Sob	797	0 27 35,1	2 41 11 10 45	5 17 1,00718	19 38 06	-21 28 63,441	3,3	79
254	10	Nie	798	0 31 31,6	3 02 11 14 20	4 54 1,00691	20 28 39	-20 05 63,280	4,3	87
255	11	Pon	799	0 35 28,2	3 23 11 17 56	4 31 1,00665	21 18 31	-17 48 62,981	5,3	92
256	12	Wto	800	0 39 24,8	3 44 11 21 31	4 09 1,00638	22 07 33	-14 42 62,575	6,3	97
257	13	Sro	801	0 43 21,3	4 05 11 25 07	3 46 1,00611	22 55 49	-10 55 62,097	7,3	99
258	14	Czw	802	0 47 17,8	4 27 11 28 42	3 23 1,00585	23 43 35	-6 36 61,577	0,2	Pełnia
259	15	Pia	803	0 51 14,4	4 48 11 32 17	2 60 1,00558	0 31 17	-1 55 61,042	1,2	99
260	16	Sob	804	0 55 10,9	5 10 11 35 52	2 37 1,00531	1 19 32	2 56 60,512	2,2	95
261	17	Nie	805	0 59 07,5	5 31 11 39 27	2 13 1,00504	2 08 58	7 44 59,999	3,2	89
262	18	Pon	806	1 03 04,0	5 53 11 43 02	1 50 1,00477	3 00 15	12 13 59,509	4,2	82
263	19	Wto	807	1 07 00,6	6 14 11 46 37	1 27 1,00450	3 53 56	16 10 59,046	5,2	72
264	20	Sro	808	1 10 57,2	6 35 11 50 12	1 04 1,00423	4 50 20	19 16 58,616	6,2	62
265	21	Czw	809	1 14 53,7	6 57 11 53 48	0 40 1,00396	5 49 16	21 17 58,229	7,2	51
266	22	Pia	810	1 18 50,3	7 18 11 57 23	0 17 1,00369	6 50 03	21 60 57,904	0,9	3Kw
267	23	Sob	811	1 22 46,8	7 39 12 00 59	-0 06 1,00342	7 51 28	21 18 57,665	1,9	28
268	24	Nie	812	1 26 43,4	7 60 12 04 34	-0 30 1,00314	8 52 12	19 12 57,544	2,9	19
269	25	Pon	813	1 30 39,9	8 20 12 08 10	-0 53 1,00286	9 51 12	15 53 57,568	3,9	10
270	26	Wto	814	1 34 36,5	8 41 12 11 46	-1 16 1,00258	10 47 55	11 37 57,761	4,9	4
271	27	Sro	815	1 38 33,0	9 01 12 15 22	-1 40 1,00230	11 42 20	6 44 58,130	5,9	1
272	28	Czw	816	1 42 29,6	9 22 12 18 59	-2 03 1,00202	12 34 51	1 33 58,665	0,2	Nów
273	29	Pia	817	1 46 26,1	9 42 12 22 35	-2 27 1,00173	13 26 02	-3 37 59,335	1,2	2
274	30	Sob	818	1 50 22,7	10 01 12 26 12	-2 50 1,00144	14 16 28	-8 29 60,093	2,2	6
Październik										
275	1	Nie	819	1 54 19,2	10 21 12 29 49	-3 13 1,00115	15 06 43	-12 50 60,882	3,2	12
276	2	Pon	820	1 58 15,8	10 40 12 33 27	-3 36 1,00086	15 57 10	-16 28 61,640	4,2	19
277	3	Wto	821	2 02 12,3	10 59 12 37 04	-3 60 1,00057	16 47 60	-19 16 62,310	5,2	27
278	4	Sro	822	2 06 08,9	11 17 12 40 42	-4 23 1,00028	17 39 12	-21 09 62,841	6,2	36
279	5	Czw	823	2 10 05,4	11 35 12 44 21	-4 46 0,99998	18 30 33	-22 02 63,198	7,2	46
280	6	Pia	824	2 14 02,0	11 53 12 47 59	-5 09 0,99969	19 21 45	-21 56 63,359	0,5	1Kw
281	7	Sob	825	2 17 58,6	12 11 12 51 39	-5 32 0,99939	20 12 27	-20 51 63,319	1,5	64
282	8	Nie	826	2 21 55,1	12 28 12 55 18	-5 55 0,99910	21 02 24	-18 50 63,086	2,5	73
283	9	Pon	827	2 25 51,7	12 44 12 58 58	-6 18 0,99881	21 51 30	-15 58 62,686	3,5	81
284	10	Wto	828	2 29 48,2	13 01 13 02 38	-6 40 0,99852	22 39 53	-12 22 62,153	4,5	88
285	11	Sro	829	2 33 44,8	13 16 13 06 19	-7 03 0,99823	23 27 49	-8 09 61,534	5,5	94
286	12	Czw	830	2 37 41,3	13 32 13 10 00	-7 26 0,99794	0 15 46	-3 29 60,875	6,5	98
287	13	Pia	831	2 41 37,9	13 46 13 13 42	-7 48 0,99765	1 04 19	1 27 60,226	7,5	100
288	14	Sob	832	2 45 34,4	14 01 13 17 24	-8 10 0,99736	1 54 08	6 25 59,626	0,6	Pełnia
289	15	Nie	833	2 49 31,0	14 14 13 21 07	-8 33 0,99708	2 45 50	11 10 59,109	1,6	97
290	16	Pon	834	2 53 27,5	14 28 13 24 51	-8 55 0,99680	3 39 57	15 25 58,693	2,6	92
291	17	Wto	835	2 57 24,1	14 40 13 28 35	-9 17 0,99652	4 36 40	18 51 58,384	3,6	84
292	18	Sro	836	3 01 20,6	14 52 13 32 19	-9 39 0,99625	5 35 46	21 11 58,177	4,6	75
293	19	Czw	837	3 05 17,2	15 03 13 36 04	-10 00 0,99597	6 36 28	22 13 58,062	5,6	65
294	20	Pia	838	3 09 13,7	15 14 13 39 50	-10 22 0,99570	7 37 31	21 50 58,030	6,6	54
295	21	Sob	839	3 13 10,3	15 24 13 43 37	-10 43 0,99542	8 37 39	20 04 58,073	0,7	3Kw
296	22	Nie	840	3 17 06,9	15 34 13 47 24	-11 05 0,99515	9 35 52	17 05 58,190	1,7	31
297	23	Pon	841	3 21 03,4	15 42 13 51 12	-11 26 0,99488	10 31 45	13 07 58,387	2,7	21
298	24	Wto	842	3 24 60,0	15 50 13 55 00	-11 47 0,99461	11 25 21	8 27 58,670	3,7	13
299	25	Sro	843	3 28 56,5	15 57 13 58 50	-12 08 0,99435	12 17 08	3 24 59,046	4,7	6
300	26	Czw	844	3 32 53,1	16 04 14 02 40	-12 28 0,99408	13 07 43	-1 46 59,515	5,7	2
301	27	Pia	845	3 36 49,6	16 10 14 06 31	-12 48 0,99381	13 57 46	-6 47 60,067	6,7	0
302	28	Sob	846	3 40 46,2	16 15 14 10 22	-13 09 0,99354	14 47 49	-11 23 60,680	0,7	Nów
303	29	Nie	847	3 44 42,7	16 19 14 14 14	-13 29 0,99328	15 38 18	-15 22 61,320	1,7	3
304	30	Pon	848	3 48 39,3	16 22 14 18 08	-13 48 0,99301	16 29 23	-18 33 61,945	2,7	7
305	31	Wto	849	3 52 35,8	16 25 14 22 01	-14 08 0,99274	17 21 01	-20 49 62,508	3,7	13
Dzień	<i>JD</i>	<i>LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza

Dzień	<i>JD LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza K.	
r. m. tyg.	2451 h m s	m s h m s	h m s	° ' "	AU	h m s	° ' "	R_{\oplus}	d %	
Listopad										
306	1 Śro	850 3 56 32,4	16 27 14 25 56	-14 27 0,99248	18 12 53	-22 06 62,964	4,7	21		
307	2 Czw	851 4 00 28,9	16 28 14 29 51	-14 46 0,99222	19 04 34	-22 21 63,271	5,7	29		
308	3 Pia	852 4 04 25,5	16 28 14 33 48	-15 05 0,99196	19 55 37	-21 35 63,398	6,7	38		
309	4 Sob	853 4 08 22,1	16 28 14 37 45	-15 24 0,99170	20 45 43	-19 52 63,327	7,7	47		
310	5 Nie	854 4 12 18,6	16 27 14 41 42	-15 42 0,99144	21 34 45	-17 18 63,052	0,7	1Kw		
311	6 Pon	855 4 16 15,2	16 25 14 45 41	-16 00 0,99118	22 22 50	-13 57 62,587	1,7	66		
312	7 Wto	856 4 20 11,7	16 22 14 49 40	-16 18 0,99093	23 10 18	-9 57 61,959	2,7	75		
313	8 Śro	857 4 24 08,3	16 18 14 53 41	-16 36 0,99069	23 57 41	-5 27 61,211	3,7	83		
314	9 Czw	858 4 28 04,8	16 14 14 57 42	-16 53 0,99044	0 45 39	-0 34 60,400	4,7	90		
315	10 Pia	859 4 32 01,4	16 08 15 01 44	-17 10 0,99020	1 34 57	4 29 59,588	5,7	96		
316	11 Sob	860 4 35 57,9	16 02 15 05 46	-17 27 0,98997	2 26 20	9 27 58,839	6,7	99		
317	12 Nie	861 4 39 54,5	15 55 15 09 50	-17 43 0,98973	3 20 27	14 03 58,212	0,1	Pełnia		
318	13 Pon	862 4 43 51,0	15 47 15 13 55	-17 59 0,98951	4 17 39	17 56 57,749	1,1	98		
319	14 Wto	863 4 47 47,6	15 38 15 17 60	-18 15 0,98928	5 17 46	20 47 57,475	2,1	94		
320	15 Śro	864 4 51 44,2	15 29 15 22 06	-18 30 0,98907	6 19 54	22 17 57,392	3,1	87		
321	16 Czw	865 4 55 40,7	15 18 15 26 13	-18 45 0,98885	7 22 35	22 17 57,481	4,1	79		
322	17 Pia	866 4 59 37,3	15 07 15 30 21	-19 00 0,98864	8 24 10	20 50 57,713	5,1	68		
323	18 Sob	867 5 03 33,8	14 55 15 34 30	-19 15 0,98844	9 23 24	18 05 58,051	6,1	57		
324	19 Nie	868 5 07 30,4	14 42 15 38 39	-19 29 0,98823	10 19 44	14 18 58,461	0,4	3Kw		
325	20 Pon	869 5 11 27,0	14 28 15 42 50	-19 42 0,98804	11 13 15	9 47 58,916	1,4	35		
326	21 Wto	870 5 15 23,5	14 13 15 47 01	-19 56 0,98784	12 04 30	4 51 59,397	2,4	25		
327	22 Śro	871 5 19 20,1	13 58 15 51 13	-20 09 0,98765	12 54 14	-0 15 59,896	3,4	16		
328	23 Czw	872 5 23 16,6	13 41 15 55 26	-20 21 0,98746	13 43 17	-5 16 60,407	4,4	9		
329	24 Pia	873 5 27 13,2	13 24 15 59 40	-20 34 0,98727	14 32 20	-9 58 60,926	5,4	4		
330	25 Sob	874 5 31 09,7	13 06 16 03 54	-20 46 0,98709	15 21 56	-14 10 61,449	6,4	1		
331	26 Nie	875 5 35 06,3	12 48 16 08 09	-20 57 0,98691	16 12 25	-17 39 61,963	0,0	Nów		
332	27 Pon	876 5 39 02,8	12 28 16 12 25	-21 08 0,98673	17 03 46	-20 16 62,449	1,0	1		
333	28 Wto	877 5 42 59,4	12 08 16 16 42	-21 19 0,98655	17 55 44	-21 55 62,881	2,0	4		
334	29 Śro	878 5 46 56,0	11 47 16 20 59	-21 29 0,98638	18 47 46	-22 32 63,229	3,0	9		
335	30 Czw	879 5 50 52,5	11 26 16 25 17	-21 39 0,98621	19 39 18	-22 07 63,460	4,0	15		
Grudzień										
336	1 Pia	880 5 54 49,1	11 04 16 29 36	-21 49 0,98604	20 29 49	-20 43 63,541	5,0	22		
337	2 Sob	881 5 58 45,6	10 41 16 33 55	-21 58 0,98588	21 19 02	-18 26 63,448	6,0	30		
338	3 Nie	882 6 02 42,2	10 18 16 38 15	-22 07 0,98572	22 06 57	-15 22 63,165	7,0	39		
339	4 Pon	883 6 06 38,7	9 54 16 42 36	-22 15 0,98557	22 53 52	-11 38 62,688	8,0	48		
340	5 Wto	884 6 10 35,3	9 29 16 46 57	-22 23 0,98541	23 40 17	-7 21 62,031	0,8	1Kw		
341	6 Śro	885 6 14 31,9	9 04 16 51 18	-22 30 0,98527	0 26 55	-2 41 61,224	1,8	68		
342	7 Czw	886 6 18 28,4	8 39 16 55 40	-22 37 0,98513	1 14 35	2 15 60,315	2,8	77		
343	8 Pia	887 6 22 25,0	8 13 17 00 03	-22 43 0,98499	2 04 10	7 15 59,365	3,8	86		
344	9 Sob	888 6 26 21,5	7 46 17 04 26	-22 49 0,98486	2 56 35	12 03 58,451	4,8	92		
345	10 Nie	889 6 30 18,1	7 19 17 08 50	-22 55 0,98474	3 52 31	16 21 57,650	5,8	97		
346	11 Pon	890 6 34 14,6	6 52 17 13 13	-23 00 0,98462	4 52 12	19 45 57,033	6,8	100		
347	12 Wto	891 6 38 11,2	6 24 17 17 38	-23 05 0,98450	5 55 07	21 55 56,653	0,6	Pełnia		
348	13 Śro	892 6 42 07,8	5 56 17 22 02	-23 09 0,98440	6 59 47	22 33 56,538	1,6	96		
349	14 Czw	893 6 46 04,3	5 28 17 26 27	-23 13 0,98430	8 04 12	21 36 56,682	2,6	90		
350	15 Pia	894 6 50 00,9	4 59 17 30 53	-23 16 0,98420	9 06 27	19 09 57,053	3,6	82		
351	16 Sob	895 6 53 57,4	4 30 17 35 18	-23 19 0,98412	10 05 24	15 32 57,600	4,6	72		
352	17 Nie	896 6 57 54,0	4 01 17 39 44	-23 21 0,98403	11 00 49	11 05 58,261	5,6	61		
353	18 Pon	897 7 01 50,6	3 31 17 44 10	-23 23 0,98395	11 53 12	6 09 58,978	6,6	50		
354	19 Wto	898 7 05 47,1	3 02 17 48 36	-23 25 0,98388	12 43 21	1 02 59,701	1,0	3Kw		
355	20 Śro	899 7 09 43,7	2 32 17 53 02	-23 26 0,98381	13 32 12	-4 01 60,397	2,0	29		
356	21 Czw	900 7 13 40,2	2 02 17 57 29	-23 26 0,98375	14 20 37	-8 47 61,041	3,0	20		
357	22 Pia	901 7 17 36,8	1 32 18 01 55	-23 26 0,98369	15 09 20	-13 05 61,625	4,0	13		
358	23 Sob	902 7 21 33,3	1 02 18 06 22	-23 26 0,98364	15 58 50	-16 45 62,143	5,0	7		
359	24 Nie	903 7 25 29,9	0 32 18 10 48	-23 25 0,98359	16 49 21	-19 37 62,596	6,0	3		
360	25 Pon	904 7 29 26,4	0 03 18 15 14	-23 24 0,98354	17 40 46	-21 33 62,982	7,0	0		
361	26 Wto	905 7 33 23,0	-0 27 18 19 41	-23 22 0,98350	18 32 39	-22 30 63,295	0,3	Nów		
362	27 Śro	906 7 37 19,6	-0 57 18 24 07	-23 19 0,98346	19 24 23	-22 24 63,526	1,3	1		
363	28 Czw	907 7 41 16,1	-1 27 18 28 33	-23 17 0,98342	20 15 19	-21 17 63,660	2,3	5		
364	29 Pia	908 7 45 12,7	-1 56 18 32 59	-23 13 0,98339	21 04 59	-19 15 63,676	3,3	9		
365	30 Sob	909 7 49 09,3	-2 25 18 37 25	-23 10 0,98336	21 53 11	-16 25 63,554	4,3	15		
366	31 Nie	910 7 53 05,8	-2 54 18 41 50	-23 05 0,98333	22 40 02	-12 53 63,275	5,3	23		
Dzień	<i>JD LASTO</i>	$\Delta\alpha$	α_{\odot}	δ_{\odot}	\mathcal{R}_{\odot}	α_K	δ_K	\mathcal{R}_K	Faza	

8.3 Współrzędne geograficzne wybranych miejsc

<i>Miasta w Polsce</i>					
	λ	φ		λ	φ
Białystok	23°09'	53°08'	Piła	16°45'	53°09'
Bydgoszcz	18 00	53 07	Płock	19 42	52 33
Częstochowa	19 01	50 49	Poznań	16 53	52 24
Gdańsk	18 39	54 22	Przemyśl	22 46	49 47
Gdynia	18 32	54 31	Radom	21 09	51 24
Gniezno	17 37	52 32	Rzeszów	22 00	50 02
Grudziądz	18 45	53 30	Słupsk	17 02	54 28
Inowrocław	18 15	52 48	Suwałki	22 56	54 06
Katowice	19 02	50 16	Szczecin	14 34	53 26
Koszalin	16 11	54 12	Tarnów	21 00	50 01
Kraków	19 58	50 04	Toruń	18 33	53 01
Legnica	16 10	51 03	Warszawa	21 02	52 13
Leszno	16 34	51 51	Włocławek	19 04	52 39
Lublin	22 36	51 15	Wrocław	17 05	51 07
Łódź	19 30	51 47	Zakopane	19 57	49 18
Olsztyn	20 29	53 47	Zielona Góra	15 30	51 56
Opole	17 56	50 40	Zyrardów	20 25	52 04
<i>Miasta świata i miejsca historyczne</i>					
Aleksandria	30 00	31 05	Lizbona	-9 11	38 43
Antiochia	36 10	36 12	Los Angeles	-118 18	34 07
An-yi	111 12	35 06	Lo-yang	112 26	34 47
Ateny	23 43	37 58	Lwów	24 01	49 50
Babilon	44 25	32 33	Madryt	-3 41	40 24
Bagdad	44 24	34 24	Meksyk	-99 09	19 25
Bergamo	9 40	45 42	Melbourne	144 58	-37 50
Berlin	13 24	52 31	Melk	15 21	48 14
Bombaj	72 49	18 54	Montreal	-73 35	45 30
Budapeszt	19 04	47 30	Moskwa	37 34	55 45
Buenos Aires	-58 21	-34 37	Nadia	88 21	23 27
Bukareszt	26 06	44 25	Nan-ching	118 47	32 02
Ch'ang-an	108 53	34 21	Novgorod	31 20	58 30
Chicago	-87 37	41 50	Nowy Jork	-73 57	40 49
Chü-fu	117 01	35 32	Oslo	10 43	59 55
Coimbra	-8 25	40 13	Paryż	2 20	48 50
Cordoba	-4 46	37 53	Pekin	116 28	39 54
Fatima	-8 51	39 51	Pińsk	26 06	52 06
Genewa	6 09	46 12	Praga	14 25	50 06
Greenwich	0 00	51 29	Rio de Janeiro	-43 13	-22 54
Hawana	-82 24	23 05	Rzym	12 29	41 54
Helsinki	24 57	60 10	Sao Paulo	-46 37	-23 39
Hongkong	114 10	22 18	Singapur	103 49	1 18
Honolulu	-157 50	21 18	Sydney	151 12	-33 52
Irkuck	104 17	52 16	Szanghai	121 27	31 14
Jerozolima	35 00	31 48	Sztokholm	18 04	59 21
Kair	31 15	30 02	Teheran	51 22	35 43
Kalkuta	88 21	22 33	Tokio	139 33	35 40
Kapsztad	18 29	-33 56	Toledo	-4 02	39 52
Kijów	30 30	50 27	Toronto	-79 24	43 40
Konstantynopol	28 59	41 01	Ugarit	35 47	35 37
Kerulen River	115 54	48 11	Wiedeń	16 20	48 14
Kuang-ling	119 27	32 26	Wilno	25 17	54 41
Kyōto	135 45	35 02	Władystok	131 54	43 07
Leningrad	30 18	59 57	Zheng	109 48	34 30

8.4 Program do obliczania współrzędnych Słońca (SOL)

Reprodukowany tu program FORTRANowski pozwala obliczać współrzędne Słońca (ekliptyczne i równikowe z dokładnością na ogół lepszą niż 2''), równanie czasu i czas gwiazdowy. Nieco tylko większe błędy daje on kilka tysięcleci wstecz w czasie. Algorytm dla współrzędnych ekliptycznych podano w pracach Bretagnon i Simon (1986) oraz Bretagnon i in. (1986). *Dynamiczny czas gwiazdowy*, który oznaczyliśmy przez **DAST** dotyczy zerowego południka *efemerydalnego*. Długość efemerydalna różni się od geograficznej o gwiazdowy równoważnik różnicy czasu efemeryd (dynamicznego) i uniwersalnego (albo **JED** i *JD*), ΔT . Aby otrzymać zwykły czas gwiazdowy można posłużyć się wzorem (por. p. 3.3):

$$GAST = DAST - 1,0027379 \cdot \Delta T.$$

subroutine SOL(JED,RA,DEC,DL,RS,EQT,DAST)

- c Procedura oblicza współrzędne równikowe (RA i DEC), długość ekliptyczną (DL) [rad],
- c odległość Słońca od Ziemi (RS [AU]) równanie czasu (EQT) i czas gwiazdowy (DAST)
- c [rad] na moment określony przez julijską datę efemerydalną (JED).
- c Błąd długości (DL) = $2'' + 0.03'' \cdot (u \cdot 10)^2$; Algorytm główny wg. Bretagnon i in. 1986

real*8 JED,u,rsd,dld,f,a(38),n(38),l(38),r(18),pi2

data pi2/6.283185307179d0/

* , a/6.24005d0,6.1969147d0,6.15378d0,4.315d0,5.198d0,2.846d0,
 * 1.423d0,8.63d0,3.193d0,1.223d0,2.75d0,9.944d0,4.5d0,2.84d0,
 * 1.92d0,4.27d0,1.89d0,5.98d0,4.533d0,0.061d0,2.828d0,4.654d0,
 * 3.229d0,4.374d0,4.345d0,3.44d0,4.24d0,5.96d0,.09d0,4.03d0,
 * 2.65d0,1.72d0,4.27d0,.93d0,2.21d0,3.59d0,4.97d0,5.69d0/

* , n/3*.0d0,57533.85d0,777137.71d0,78604.2d0,39302.1d0,115067.7d0,
 * 15774.34d0,15773.85d0,52237.69d0,58849.26d0,55076.5d0,55075.7d0,
 * 54868.6d0,117906.3d0,109771.2d0,-55731.4d0,-33.93d0,-34.86d0,
 * 5296.67d0,5296.11d0,261.08d0,264.89d0,-3980.7d0,-7756.6d0,
 * -7752.8d0,-7961.4d0,25443.9d0,60697.8d0,207.8d0,2132.2d0,2132.8d0
 * ,-8.d0,46941.1d0,-68.3d0,29424.6d0,157208.4d0/

* , l/3*.0d0,350.d0,314.d0,-268.d0,234.d0,132.d0,129.d0,64.d0,78.d0,
 * -99.d0,72.d0,29.d0,24.d0,-32.d0,27.d0,21.d0,334.d0,158.d0,114.d0,
 * 93.d0,68.d0,37.d0,86.d0,38.d0,14.d0,28.d0,21.d0,20.d0,13.d0,
 * 27.d0,18.d0,12.d0,2*10.d0,13.d0,-10.d0/

* , r/3*.0d0,-163.d0,309.d0,158.d0,-54.d0,-93.d0,-23.d0,-11.d0,
 * -33.d0,47.d0,-33.d0,-14.d0,-11.d0,24.d0,-19.d0,31.d0/
 u = (JED-2451545d0)/3652500.d0

```

l(1) = ((2885d0*u-25347d0)*u-84065d0)*u+334166d0
l(2) = ((194d0*u-309d0)*u-1755d0)*u+3489d0
l(3) = 51-38*u
r(1) = -499961*l(1)
r(2) = -4*l(2)
r(3) = -346*l(3)
n(1) = (((-0024*u-.0055)*u+.0007)*u-.02682)*u+62830.1955d0
n(2) = 2.*n(1)
n(3) = 3.*n(1)
dld = (dmod(4.8950592d0+u*62833.1966661d0,pi2)+u*u*(((0.00063*u
* +.00082)*u-.00088)*u-.011408)*u+.00035)*u+.052919))*1d7
rsd = ((80*u-120)*u-702d0)*u
a7 = dld
do 1 i = 38,1,-1
f = dmod(a(i)+n(i)*u,pi2)
if(i.lt.19) rsd = rsd+r(i)*dcos(f)
1 dld = dld+l(i)*dsin(f)
c do nutacji: l(1) = omega, l(2) = 2Ls, dlk2 = 2Lk
l(1) = dmod(2.1824d0+(.36244*u-3375.7)*u,pi2)
l(2) = dmod(3.507d0+(.106*u+125666.39)*u,pi2)
dlk2 = dmod(a7*2d-7+2*(a(5)+n(5)*u),pi2)
dla = ((-17.1996-1.742*u)*dsin(l(1))-1.3187*dsin(l(2))-
*.2274*sin(dlk2)+.2062*dsin(2*l(1)))/206264.8
c u gory - nutacja w dlug.[rad]; nizej - nutacja w eps ["]
de = 9.2025*dcos(l(1))+.5736*dcos(l(2))+.0977*cos(dlk2)-
*.0895*dcos(2*l(1))
se = dsin((23+26/60d0+((((((10.*u-39.)*u-250.)*u-51.4)*u+
* 1999.3)*u-1.6)*u-4680.93)*u+21.448+de)/3600.)*pi2/360)
ce = sqrt(1-se*se)
c aberracja = -(993.651+17.*cos(f(i=1)))*1d-7 [rad]
dld = dmod((dld-(993.651+17.*dcos(f)))*1d-7+dla+pi2,pi2)
DL = dld
RS = rsd*1d-7+1.0001399d0
RA = atan2(ce*sin(dld),cos(dld))
DEC = asin(se*sin(dld))
EQT = amod(a7*1e-7 - RA,6.283185)
if(abs(EQT).gt.3.) EQT = EQT - sign(6.283185,EQT)
IF(RA.LT.0) RA = RA + 6.2831853
DAST = dmod((JED-2451545d0)*pi2+a7*1d-7+dla,pi2)
if(DAST.LT.0.) DAST = DAST + 6.2831853
end

```

Test podprogramu SOL dla dat 1.07.1990 r. i 1.07.-775 r. na godzinę $0^{00}ET$:

JED	RA	DEC	DL	RS	EQT	DAST
2448073.50000000	1.74027	0.403899	1.72652	1.01663	-0.160370E-01	4.86589
1438170.50000000	1.56379	0.415132	1.56439	1.01461	0.208774E-01	4.72622

8.5 Program do obliczania współrzędnych Księżyca (LUNE)

Podprogram **LUNE**, którego wydruk podajemy niżej, oparty jest na algorytmie Chapront–Touzé i Chapront (1988) lecz uproszczonym przez pominięcie najmniejszych wyrazów w rozwinięciach długości i szerokości ekliptycznej oraz odległości od Ziemi. Takie uproszczenie poprawia znacząco czas wykonania programu kosztem pogorszenia dokładności wyników (w XX w. oryginalny algorytm ma dokładność 2'' w obu współrzędnych ekliptycznych a nasza wersja tylko 10''). Program można używać w okresie ± 3500 lat od współczesności pamiętając jednak o wartości pływowego przyspieszenia Księżyca, która istotnie wpływa na współrzędne tego ciała w czasach historycznych. Dość powszechnie, ale nie uniwersalnie, przyjmuje się na nią $-26''/\text{wiek}^2$ (i tak, w odróżnieniu od oryginału, przyjęto w tej wersji; parametr **TIDACC**).

```
subroutine LUNE(JED,RA,DEC,DLE,B,RK)
```

- c Procedura oblicza współrzędne [w rad] ekliptyczne (DLE i B) i równikowe (RA i DEC)
- c oraz odległość Księżyca od Ziemi [w promieniach Ziemi] na moment określony przez
- c dzień juliański (JED). Błędy: 10'' (obecnie) – 20'' (1500 B.C.)
- c TIDACC = -26''/cy/cy można zmieniać (patrz PARAMETER)

```
implicit real*8 JED,(a-h,l,o-z)
```

```
dimension ap1(4),al(5),bD(4),pl(4),bl(4),bf(4),eps(4)
```

```
real*4 DLE,B,RA,DEC,RK,av(72),au(2,24),au3(25:32),ar(52)
```

```
integer*2 iv(4,72),iu(2,24),iu3(25:32)
```

```
data iv,iu,iu3 /0,0,1,0,2,0,-1,0,0,0,2,0,0,1,0,0,0,0,0,2,
* 2, 0,-2, 0, 2,-1,-1, 0, 2, 0, 1, 0, 2,-1, 0, 0, 0, 1,-1, 0,
* 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 0,-2, 0, 0, 1,-2, 4, 0,-1, 0,
* 0, 0, 3, 0, 4, 0,-2, 0, 2, 1,-1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,
* 2,-1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0,
* 2, 0,-3, 0, 0, 1,-2, 0, 2,-1,-2, 0, 2,-2, 0, 0, 0, 1, 2, 0,
* 4,-1,-1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0,-1, 0, 2,-2,-1, 0, 0, 0, 2,-2,
* 2, 0, 1,-2, 3, 0,-1, 0, 2, 2,-1, 0, 0, 2,-1, 0, 4,-1,-2, 0,
* 1, 0,-2, 0, 4,-1, 0, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 4, 0,
* 0, 2, 0, 0, 2,-1, 2, 0, 2,-2, 1, 0, 2,-1, 0,-2, 1,-1, 0, 0,
* 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 0,-1, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 2,
* 2, 1,-2, 0, 2, 1, 0,-2, 1, 1, 1, 0, 3, 0,-2, 0, 4, 0,-3, 0,
* 1, 1,-1, 0, 2, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 2, 2, 0,-4, 0, 0, 1,-3, 0,
* 4, 1,-1, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0,-2, 6, 0,-2, 0, 2, 0,-2,-2,
* 0, 1, 3, 0, 2, 0,-2, 2,
* 1,-1, 1,-1, 1,-1, 1,-1,-1,1,-1,1, 1,-1,-1,1,-1,1,-1, 1,-1,
* 1,-1, 3,-1,-1,5,-1,1, 1,-1, 1,-1, 1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,
* -1,1, 1,-1, -1,-1,-1,-1,-1, 1,-1,-1/
```

```
data av,au,au3,ar/22639.586,4586.44,769.03,0.,-411.60,211.66,
```

```
* 0.,191.96, 0.,0.,-124.99,0., 55.18,39.53,38.43,36.12,
```

```

* 30.77,-28.40,-24.36,17.95,14.53,14.38,13.9,-8.45,2369.91,
* 13.19,-9.68,8.61,8.05,-7.63, 4.37,-2.91,-18.58,7.37,-1.37,
* -6.38,-3.21,-2.52,-2.57, 2.73,-1.75, 1.87,1.98,-1.16, 1.93,
* -7.45, 1.18, 0.75, 2.15,-0.56,.4,-45.10,-9.37,-5.74,-4.00,
* 2.49,-1.44, 1.26,-1.22, 1.19, 1.08, 1.06,-0.99,0.95,-0.67,
* -0.64,-0.58,-0.58, 0.57,-0.56,-0.55,-0.54,
c au
* 1010.17,999.69,199.48,166.57,61.91,31.76,-6.46,-4.84,
*18461.24,-6.30,15.57,-1.62, 8.87, 7.43,33.36,15.12,
* 29.58, 7.96,-6.73,-5.63,-5.37,-4.81,-5.31,-5.08,
* 117.26, 2.19, 2.80,-1.02, 6.58, 3.00, 3.98, 1.58,
* 2.41, 0.63,-1.32,-0.79,-12.09,-1.26,0.80, 0.80,
* 1.77, 1.13, 2.15, 1.52, 3.67, 1.19,-0.67,-0.59,
c au3
* 623.65, 1.52,-0.79, 0.65, 1.09,-0.64, 0.60,-0.82,
c ar
*-20905.36, -3699.11, -569.93, 0. , -3.15,246.16,
* .0 , -170.73, 0. , 0. , 108.74, 0. , 10.32,
* 79.66, -34.78, -23.21, -21.64, 24.21, 30.82,-16.67,
* -12.83, -10.44, -11.65, 6.32,-2955.97, 14.40, -7.00,
* 10.06,-9.88, 5.75,-3.96, 2.62,-8.38,-4.95,
* -4.42, 4.13, 3.26, 2.35,-2.12,-1.90,-1.74,
* -1.57,-1.42, 1.17,-1.12, 1.07,-0.85,-0.66,
* 0.66, 0.50,-1.42, 0.00/
c zgodne z LE51 (Tab 8,AA 190,342); do al (Lk) dodano 0.0351''*T**2
data al/0.d0,1732564372.29232d0,-5.9462d0,0.6642d-2,-0.5522d-4/
data bD,pl,bl,bf/1602961600.8820d0,-7.0731d0,0.6556d-2,
* -0.3184d-4, 129596581.0996d0,-0.5529d0,0.147d-3,0.d0,
* 1717915922.8022d0,31.1665d0,0.51612d-1,-0.24470d-3,
* 1739527262.7141d0,-13.4508d0,-0.1060d-2,0.417d-5/
data ap1/210664136.43355d0,
* 129597742.2758d0,68905077.59284d0,10925660.42861d0/
*,eps/84381.448d0,-46.815d0,-.00059d0,.001813d0/
dms(id,im,s) = (id*60+im)*60+s
PARAMETER (rad = 1/206264.8062470964d0,TIDACC = -26.d0)

T = (JED-2451545.d0)/36525.d0
dk = (TIDACC+26.3046d0)*(5+1.60816d-5*T)
Lk = (dms(218,18,59.95571d0+.24177d0)+
* (((al(5)*T+al(4))*T+al(3)+dk)*T+al(2))*T)*rad
D = (dms(297,51,0.73512d0-.07293d0)+
* ((bD(4)*T+bD(3))*T+bD(2)+dk)*T+bD(1))*T)*rad
lp = (dms(357,31,44.79306d0+.03845)+
* ((pl(4)*T+pl(3))*T+pl(2))*T+pl(1))*T)*rad
l = (dms(134,57,48.28096d0-.097)+
* ((bl(4)*T+bl(3))*T+bl(2)+dk)*T+bl(1))*T)*rad
F = (dms(93,16,19.55755d0-.05596d0)+

```

```

* (((bF(4)*T+bF(3))*T+bF(2)+dk)*T+bF(1))*T)*rad

  Ve = (dms(181,58,47.28305d0)+ap1(1)*T)*rad
  Te = (dms(100,27,59.22059d0)+ap1(2)*T)*rad
  aMa = (dms(355,25,59.78866d0)+ap1(3)*T)*rad
  aJu = (dms(34,21,5.34212d0)+ap1(4)*T)*rad
  av(4) = -666.4171+T*(1.6768+T*.004787)
  av(7) = 205.43582-T*(.51642+T*.0015)
  av(9) = 164.72851-T*(.41383+T*.0012)
  av(10) = -147.32129+T*(.37115+T*.00108)
  av(12) = -109.38029+T*(.2756+T*.0008)
  ar(9) = -204.59+T*(.51395+T*.00149)
  ar(7) = -152.14+T*(.38245+T*.00111)
  ar(10) = -129.62+T*.32654
  ar(12) = 104.76-T*.26396
  ar(4) = 48.8883-T*.12302

  VeT = 18*Ve-16*Te-l+.46326
  sV = sin(VeT)
  r = 8.752*cos(D+D-l-F-F)+1.059*cos(D+D-l+Te+Te-aJu-aJu+.0021)
  u = -8.0451*sin(Lk)+1.5102*sin(D+Te+4.829)+1.2605*sV*cos(F)
  * -.87*sin(l)*cos(Lk)-.614*sin(Lk-F-F)*cos(l+l-F)
  * -.63*sin(l+l)*cos(D+D-F-F)
  v = sV*(14.24883+1.5274*cos(l))+(.7063+.9847*cos(Lk-F+l+l))*
  * sin(Lk-F)-1.14307*sin(D+D-l+Te+Te-aJu-aJu) +.90114*sin(4*Te)
  * -.8*aMa+3*aJu+4.9914) +(.603*cos(Ve-Te)-.82155)*sin(Ve-Te)
  * -.6437*sin(3*(Ve-Te)+D+D-l) +.6388*sin(Te-aJu+.02145)
  * +.56341*sin(10*Ve-3*Te-l+5.81728) +T*.25425*cos(VeT)

  do 3 i = 33,52
    j = i+20
    df = iv(1,i)*D+iv(2,i)*lp+iv(3,i)*l+iv(4,i)*F
    v = v+av(i)*sin(df)+
    * av(j)*sin(iv(1,j)*D+iv(2,j)*lp+iv(3,j)*l+iv(4,j)*F)
  3 r = r+ar(i)*cos(df)

  do 2 i = 25,32
    df = iv(1,i)*D+iv(2,i)*lp+iv(3,i)*l+iv(4,i)*F
    u = u+au3(i)*sin(iu3(i)*F+df)
    v = v+av(i)*sin(df)
  2 r = r+ar(i)*cos(df)

  do 1 i = 24,1,-1
    df = iv(1,i)*D+iv(2,i)*lp+iv(3,i)*l+iv(4,i)*F
    u = u+au(1,i)*sin(iu(1,i)*F+df)+au(2,i)*sin(iu(2,i)*F+df)
    v = v+av(i)*sin(df)
  1 r = r+ar(i)*cos(df)

```

```

RK = (r+385000.529d0)/6378.14d0
B = u*rad
dla = -(17.2+.0174*T)*sin(Lk-F)-1.3187*sin(Lk-D+Lk-D)-
* .43*sin(F)*cos(Lk+Lk-F)
DLE = amod(Lk+(v+dla)*rad,6.283185307180d0)
      if(DLE.lt..0) DLE = DLE+6.2831853
ep = ((eps(4)*T+eps(3))*T+eps(2))*T+eps(1)
se = sin((ep+9.2025*cos(Lk-F)+.5736*cos(Lk-D+Lk-D))*rad)
ce = sqrt(1. - se*se)
sd = sin(DLE)
DEC= asin(sd*se*cos(B) + sin(B)*ce)
RA = amod(atan2(sd*ce-tan(B)*se,cos(DLE))+6.2831853,6.2831853)
end

```

Test podprogramu LUNE dla dat 1.07.1990 r. i 1.07.-775 r. na godzinę 0⁰⁰ET:

JED	RA	DEC	DLE	B	RK
2448073.50000000	3.44648	-0.223743	3.50791	-0.872345E-01	62.9338
1438170.50000000	6.27315	-0.542062E-01	6.25212	-0.455503E-01	62.4692

Literatura

- Almanac for Computers 1990*, Nautical Almanac Office, USNO, Washington (DC).
- Amundsen R., 1990, *Nie z tej ziemi*, Nr. 1, 41.
- Annual Report for 1987*, Bureau International de l'Heure, Sèvres and Paris (1988).
- Annual Report for 1989*, International Earth Rotation Service, Paris (1990).
- Aoki S., Guinot B., Kaplan, G.H., Kinoshita H., McCarthy D.D., Seidelmann P.K., 1982, *Astron. Astrophys.*, **105**, 359.
- Astronomical Almanac for the Year 1990*, The, U.S. Government Printing Office, Washington oraz Her Majesty's Stationery Office, London (1989).
- Astronomicheskij Ezhegodnik SSSR 1990*, Nauka, Leningrad (1988).
- Augustynek Z., 1979, *Przeszłość, terażniejszość, przyszłość. Studium filozoficzne*, PWN, Warszawa.
- Baker T.F., 1984, *Sci. Prog. Oxf.*, **69**, 197.
- Bertiau F.C., 1977, *Programmes for Pocket Calculators ...*, Leuven Univ. Press.
- Bielicki M., Ziółkowski K., 1976, *Acta Astron.*, **26**, 371.
- Borkowski K.M., 1987a, *Astrophys. Space Sci.*, **139**, 1.
- Borkowski K.M., 1987b, *Post. Astronomii*, **XXXV**, 275.
- Borkowski K.M., 1988a, *Astron. Astrophys.*, **205**, L8.
- Borkowski K.M., 1988b, *Post. Astronomii*, **XXXVI**, 49.
- Borkowski K.M., 1989a, *Bull. Géod.*, **63**, 50.
- Borkowski K.M., 1989b, Solar Eclipses in Poland, 900 – 2200, *Post. Astronautyki*, **22**, Nr 3/4, 99–130.
- Borkowski K.M., 1990a, Lunar Eclipses in Europe, 900 – 2200, *Earth, Moon, and Planets*, **49**, 107–140.
- Borkowski K.M., 1990b, Lunar Penumbra Eclipses, 1900 – 2200, *Earth, Moon, and Planets*, **49**, 141–148.
- Borkowski K.M., 1991, The Tropical Year and Solar Calendar, *J. R. Astron. Soc. Canada*, **85**, No. 3, 121–130.
- Bowring B.R., 1976, *Survey Review*, **XXIII**, (181) 323 (też **XXVIII** (1985), 202).
- Bretagnon P., 1982, *Astron. Astrophys.*, **114**, 278.
- Bretagnon P., Simon J.-L., 1986, *Planetary Programs and Tables from –4000 to +2800*, Willmann-Bell, Richmond (VA, USA).
- Bretagnon P., Simon J.-L., Laskar J., 1986, *J. Hist. Astron.*, **17**, 39.
- Butkievich A.B., Zelikson M.S., 1984, *Vechnye kalendari*, Nauka, Moskva.
- Capitaine N., 1986, *Astron. Astrophys.*, **162**, 323.
- Capra F., 1987, *Punkt zwrotny*, PWN, Warszawa.
- Chapront-Touzé M., Chapront J., 1988, *Astron. Astrophys.*, **190**, 342.

- Connaissance des Temps. Éphémérides Astronomiques*, 1991, Bureau des Longitudes, Paris (1990).
- Csaba, Gy., 1986, *Csillagjósítás — Legenda és valóság*, Minerva, Budapest.
- Czajewski J., 1986, *Nawigacja żeglarska*, WKŁ, Warszawa.
- Dagaev M.M., 1978, *Solnechnye i lunnye zatmeniya*, Nauka, Moskwa.
- Danjon A., 1980, *Astronomie Générale*, J. & R. Sennac, Paris.
- de Jong T., van Soldt W.H., 1989, *Nature*, **338**, 238.
- DIANA, 1989, *Sennik egipski*, Spółka Wydawnicza DIANA, Wałcz.
- Dixey R., 1990, *Noetic Sciences Review*, No. 15, 7.
- Dutka J., 1988, *Math. Intelligencer*, **10**, (1), 56.
- Dziwisz M. (red.), 1988, *Taoizm*, Bibl. Pisma Liter.-Artyst., Krakowskie Wyd. Prasowe, Kraków.
- Eckhart, Mistrz, 1988, *Kazania i traktaty* (przeł. J. Prokopiuk), Inst. Wyd. Pax, Warszawa.
- Enslin H., 1981, *Landolt-Börnstein. New Series, group VI*, **2a**, 63 (Springer, Berlin).
- Espenak F., 1987, *Fifty Year Canon of Solar Eclipses: 1986 – 2035*, NASA RP-1178 Revised.
- Explanatory Supplement AENA (to the American Ephemeris and Nautical Almanac)*, 1961, U.S. Government Printing Office, Washington oraz Her Majesty's Stationery Office, London.
- Fangor R., 1988, *Urania, Kraków*, **LIX** (9), 266.
- Fricke W., Schwan H., Lederle T., 1988, *Fifth Fundamental Catalogue (FK5)*, Veröff. Astron. Rechen-Institut Heidelberg, No. 32.
- Gossler M., 1980, *Astron. Nachr.*, **301**, 191.
- Hatcher D.A., 1984, *Q. Jl R. Astron. Soc.*, **25**, 53.
- Hatcher D.A., 1985, *Q. Jl R. Astron. Soc.*, **26**, 151.
- Hellings R.W., 1986, *Astron. J.*, **91**, 650 i **92**, 1446.
- Hlibowicki R. (red.), 1981, *Geodezja wyższa i astronomia geodezyjna*, PWN, Warszawa.
- Howse D., 1980, *Greenwich Time and the Discovery of the Longitude*, Oxford University Press [tł. ros.: Mir, Moskwa (1983)].
- Huxley A., 1989, *Filozofia wieczysta*, Wydawnictwo Pusty Obłok, Warszawa [tytuł oryg. *The Perennial Philosophy*].
- Illingworth V., 1985, *Macmillan Dictionary of Astronomy*, Macmillan Press, London.
- Improved IAU System, The*, 1983, *Supplement to The Astronomical Almanac 1984*, s. S1–S39.
- Janiczek R., 1962, *Kalendarz astronomiczny na XX w.*, PWN, Warszawa.
- Jarzębowski, 1984, *Elementy Astronomii. Podręcznik dla technikum geodezyjnego*, P.P.W.K., Warszawa.
- Jelley J.V., 1986, *Endeavour, New Series*, **10**, 184.
- Kaplan G.H. i in., 1989, *Astron. J.*, **97**, 1197.
- Karpowicz M., Rudnicki K., 1960, *Zadania z astronomii ogólnej*, PWN, Warszawa.
- Kartaschoff P., 1985, *Częstotliwość i czas*, WKŁ, Warszawa.
- Kępiński, F., 1951, *Astronomia praktyczna. Część I*, PWN, Warszawa.
- Kępiński, F., 1959, *Astronomia sferyczna*, PWN, Warszawa.
- Kępiński, F., Dulian B., 1961, *Astronomia praktyczna. Część II*, PWN, Warszawa.
- Klimuszko A.C., 1978, *Moje widzenie świata*, Wielkopolskie Stowarz. Różdźkarzy, Poznań (wyd. 2, Intytut Prasy i Wydawnictw „Novum”, Warszawa, 1990).

- Kopernik M., 1987, *Mikołaja Kopernika O obrotach. Księga pierwsza* (tł. z łac. M. Brożek), Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.
- Koran, 1986, przekład J. Bielewskiego wg. kairskiego oryginału (AL-KUR'ĀN) z 1342 h. (1923 r.), Bibliotheca Mundi, PIW, Warszawa.
- Kovalevsky J., Mueller I.I., Kołaczek B., 1989, *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, *Astrophys. Space Sci. Lib.*, **154**, Kluwer Academic Pub., Dordrecht.
- Lang K.R., 1974, *Astrophysical Formulae — A Compendium for the Physicist and Astrophysicist*, Springer-Verlag, Berlin (tł. ros.: Mir, Moskwa, 1978).
- Laskowski P., 1991, *Bull. Géod.*, **65**, 14–17.
- Lieske J.H., Lederle T., Fricke W., Morando B., 1977, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1.
- Lisicki A., 1963, *Astronomiczne podstawy geografii*, Wydawnictwo Skryptów UMK, Toruń.
- Liu Bao-lin, 1983, *Canon of Lunar Eclipses from 1000 BC to AD 3000*, *Publ. Purple Mountain Obs. (Nanjing)*, vol. **2**, No. 1, 1–136.
- Lodö, Lama, 1990, *Kwintesencja Ożywionego i Nieożywionego*, na prawach rękopisu przełożył: Karma Trinle Gyamtso, Kraków.
- Ma Ch., 1978, *Very Long Baseline Interferometry Applied to Polar Motion, Relativity and Geodesy*, NASA-GSFC, Greenbelt (MA, USA), str. 53.
- McCarthy D.D., Babcock A.K., 1986, *Phys. Earth Planet. Interiors*, **44**, 281.
- Meeus J., 1980, *J. R. Astron. Soc. Canada*, **74**, 291.
- Meeus J., Mucke H., 1983, *Canon of Lunar Eclipses, -2002 to +2526*, Astronomisches Büro, Vienna, Austria.
- Melbourne W. i in., 1983, *Project MERIT Standards*, USNO Circ. 167, Washington.
- Merletti R.J., 1986, *Sky Telescope*, **72** (5), 515.
- Mietelski J., 1976, *Ćwiczenia z astronomicznych podstaw geografii*, UJ, Kraków.
- Mietelski J., 1979, *Astronomia w geografii*, PWN, Warszawa.
- Minster J.B., Jordan T.H., 1978, *J. Geophys. Res.*, **83**, 5331.
- Mishra R.S., 1963, *Fundamentals of Yoga*, The Julian Press, Inc., New York (też: Lyrebird Press, London, 1972; tł. polskie ZŁJ: *Podstawy jogi królewskiej — bez roku i wydawcy*).
- Montenbruck O., 1989, *Practical Ephemeris Calculations*, Springer-Verlag, Berlin.
- Moyer T., 1981, *Celestial Mech.*, **23**, 33 i 57.
- Mucke H., Meeus J., 1983, *Canon of Solar Eclipses, -2003 to +2526*, Astronomisches Büro, Vienna, Austria.
- Newcomb S., 1960, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Dover Publ., Inc., New York.
- Nisargadatta Maharaj, Śri, 1978, *Rozmowy z mędrcelem, Śri Nisargadatta Adhayatma Kendra*, Bombay.
- Opalski W., Cichowicz L., 1980, *Astronomia geodezyjna*, PPWK, Warszawa.
- Opolski A., 1964, *Astronomiczne podstawy geografii*, PWN, Warszawa.
- Oppolzer T.R.v., 1887, *Canon der Finsternisse*, Vienna.
- Pang K.D., Yau K., Chou H.-h., Wolff R., 1988, *Vistas Astron.*, **31**, 833.
- Peck P.A., 1990, *J. R. Astron. Soc. Canada*, **84**, 14.
- Polozova N.G., 1955, *Bull. Inst. Teor. Astron.*, **6**, 202.
- Prabhupada, Śri Śrimad A.C. Bhaktivedanta Swami, 1984, *Złoty Avatāra*, Bhaktivedanta Book Trust, Vaduz.
- Prabhupada, Śri Śrimad A.C. Bhaktivedanta Swami, 1986, *Bhagavad-Gītā taka jaką jest*, Bhaktivedanta Book Trust, Vaduz.

- Prengel Fr.A., 1937, *Elementarny kurs astrologii urodzeniowej w 15 lekcjach*, Polskie Tow. Astrol., Bydgoszcz.
- Prinke R.T., Weres L., 1983, *Mandala życia*, KAW, Poznań.
- Prokhovnik S.J., Morris W.T., 1989, *Found. Phys.*, **19**, 531.
- Raab H., 1988, *Sky Telescope*, **75**, 640.
- Rocznik Astronomiczny na rok 1988*, Instytut Geodezji i Kartografii, P.P.W.K., Warszawa (1987).
- Rolnik E., 1972, *Astronomiczne podstawy geografii z zadaniami*, Uniwersytet Łódzki.
- Roth G.D. (red), 1975, *Astronomy Handbook*, Springer-Verlag, Berlin.
- Rybka E., 1978, *Astronomia ogólna*, PWN, Warszawa.
- Schaefer E.B., 1990, *Q. Jl R. Astron. Soc.*, **31**, 53.
- Schmadel L.D., Zech G., 1988, *Astron. Nachr.*, **309**, 219.
- Seidelmann P.K., 1982, *Celestial Mech.*, **27**, 79.
- Sharonov V.V., 1952, *Astron. Circ.*, No. 130, 12.
- Silva J., 1985, *Metody kontroli umysłu* (brak danych bibliograficznych i ooryginalne; treść pokrywa się z rozdz. 3 – 15 w Silva i Mele 1990).
- Silva J., Mele P., 1990, *Agykontroll Silva módszerével*, Dr. Domján László, Budapest [oryg.: *The Silva Mind Control Method*, Copyright © José Silva 1977].
- Smith C.A. i in., 1989, *Astron. J.*, **97**, 265.
- Sofia S., Dunham D.W., Fiala A.D., 1980, w: *Proc. Conf. Ancient Sun* (red. R.O. Pepin i in.), s. 147.
- Stephenson F.R., Clark D.H., 1978, *Applications of Early Astronomical Records*, Adam Hilger Ltd., Bristol.
- Stephenson F.R., Houlden M.A., 1986, *Atlas of Historical Eclipse Maps. East Asia 1500 BC – AD 1900*, Cambridge University Press.
- Stephenson F.R., Morrison L.V., 1984, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A313**, 47.
- Stephenson F.R., Said S.S., 1989, *Astron. Astrophys.*, **215**, 181.
- Stiepanow N., 1960, *Trygonometria sferyczna*, PWN, Warszawa.
- Stodółkiewicz J.S., 1977, *Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki*, PWN, Warszawa.
- Strzałkowski A., Śliżyński A., 1973, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa.
- Trans. IAU*, 1977, *Transactions of the International Astronomical Union*, **16B**, 60, 155.
- Underwood Spencer P., 1990, *Noetic Sciences Review*, No. 15, 4.
- Van Flandern T.C., Pulkkinen K.F., 1979, *Astrophys. J. Supp. Ser.*, **41**, 391.
- Wahr J.M., 1981, *Geophys. J. Royal Astron. Soc.*, **64**, 705.
- Webb E.L.R., 1980, *J. R. Astron. Soc. Canada*, **74**, 17.
- White C.R., 1977, *The Solar Output and Its Variation*, Colorado Associated Univ. Press, Boulder (USA) (tł. ros.: Mir, Moskwa, 1980).
- Wielen R., Lederle T., Schwan H., 1988, *Apparent Places of Fundamental Stars 1989*, Astron. Rechen-Institut Heidelberg.
- Wiland J., Zawilski M., 1986, *Urania* (Kraków), **LVII** (12), 331.
- Witkowski J., 1953, *Astronomia sferyczna*, PWN, Warszawa.
- Woolard E.W., Clemence G.M., 1966, *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York.
- Yoder C.F., Williams J.G., Parke M.E., 1981, *J. Geophys. Res.*, **86**, 881.
- Zajdler L., 1977, *Dzieje zegara*, P.W. „Wiedza Powszechna”, Warszawa
- Zawilski M., 1990, *Urania* (Kraków), **LXI** (1–6), 2, 42, 75, 102, 137 i 177.
- Zonn W. (red.), 1973, *Kopernik, astronomia, astronautyka*, PWN, Warszawa.

Praca zawiera dużą różnorodność definicji, algorytmów, wzorów i przykładów obliczeń związanych z astronomią sferyczną i praktyczną. Autor omawia m.in. współrzędne na niebie i na Ziemi (w tym zjawiska kulminacji, wschodów, białych nocy, dni polarnych i in.), skale czasu, kalendarze, metody wyznaczania współrzędnych geograficznych, astronawigację, prawa ruchów orbitalnych, efemerydy Słońca, Księżycy i Gwiazdy Polarnej.

Niespecjalistów mogą przyciągnąć takie tematy jak np.:

- obliczanie lokalnego kierunku *satelitów geostacjonarnych* TV–SAT i ASTRA [strony 39 – 41]
- kalendarz *biorytmiczny* [63]
- kalendarze księżycowe (np. do *sennika* egipskiego) [60 i 72]
- opinie o naturze czasu i jego *wedyjska* rachuba [66]
- tabela *czasu letniego* obowiązującego w Polsce (1946 – 2012) [50]
- daty ruchomych *świąt* kościelnych [111]
- pełny wykaz *zaćmień* Słońca i Księżycy dla Polski w latach 1991 – 2040 wraz z rycinami [120 – 123]
- pewne szczegóły zaćmienia Księżycy z dnia *ukrzyżowania* Jezusa z Nazaretu [125]
- *horoskop* dla miasta Torunia na XXI w. [126 i II s. okładki]

Wśród zagadnień szczegółowych przedstawiono ponadto m.in.:

- wszystkie podstawowe *wzory* trygonometrii płaskiej i sferycznej [5]
- najważniejsze *stałe* astronomiczno–fizyczne [129]
- oryginalne ściśle rozwiązanie problemu *transformacji* współrzędnych geocentrycznych na geodezyjne [21]
- efekty zmieniające współrzędne (*refrakcja, paralaksy, aberracja, precesja, ruchy biegunów, ugięcie światła* i in.) [24]
- najważniejsze *skale czasu* (*UT0, UT1, UT1R, UT2, TAI, UTC, ET, TDT, TBD, DAST*) [52 – 57]
- geometrię radiowego interferometru wielkobazowego (*VLBI*) [78]
- długości *miesiący* i *lat* (zwrotnikowych, gwiazdowych i in.) [99]
- kalendarz *astronomiczny* na rok 2000 (wyciąg) [130 – 135]
- gotowe *programy* (FORTRAN77) do obliczania współrzędnych Słońca i Księżycy na przestrzeni 7000 lat [137 – 142]

Całość zamyka wyczerpujący wykaz *literatury* przedmiotu obejmujący około 130 pozycji polskich i obcojęzycznych.