Számítógépes Szimulációk

Bolygók Kepler-pályákon való mozgásának dinamikai leírása

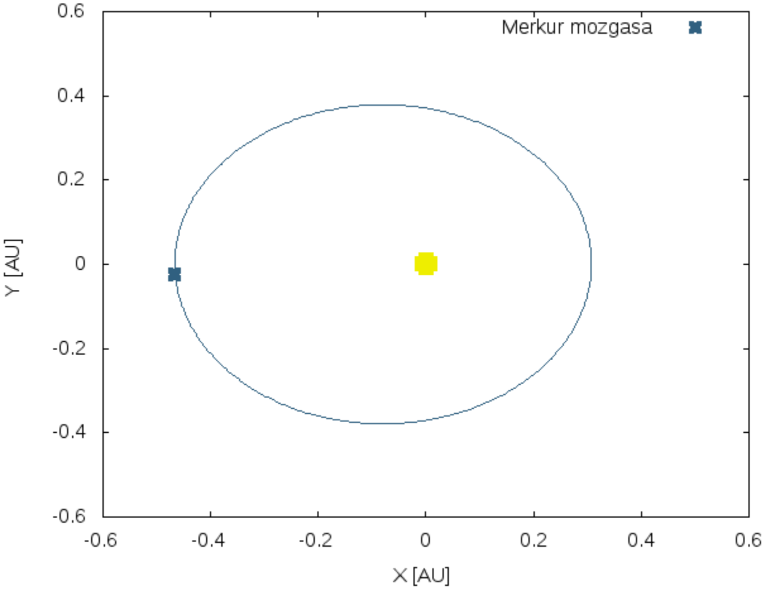
Koblinger Ádám - ELTE TTK Fizika MSc, I. évfolyam

Szécsi Dorottya - ELTE TTK Fizika MSc, I. évfolyam

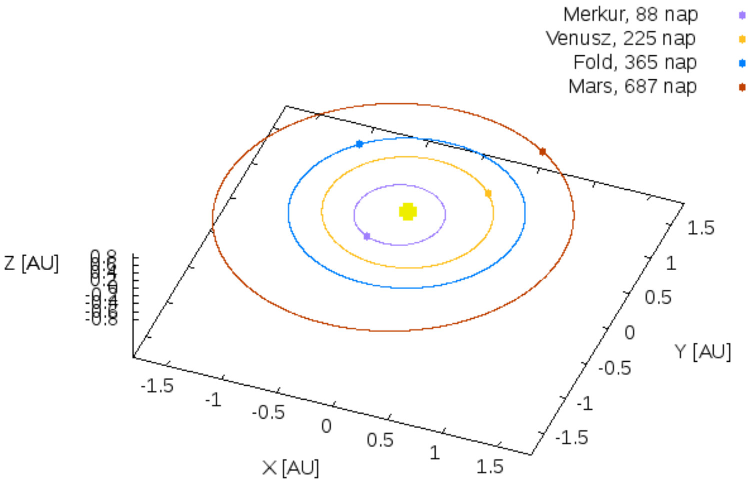
2010.12.14.

Johannes Kepler (1571-1630)

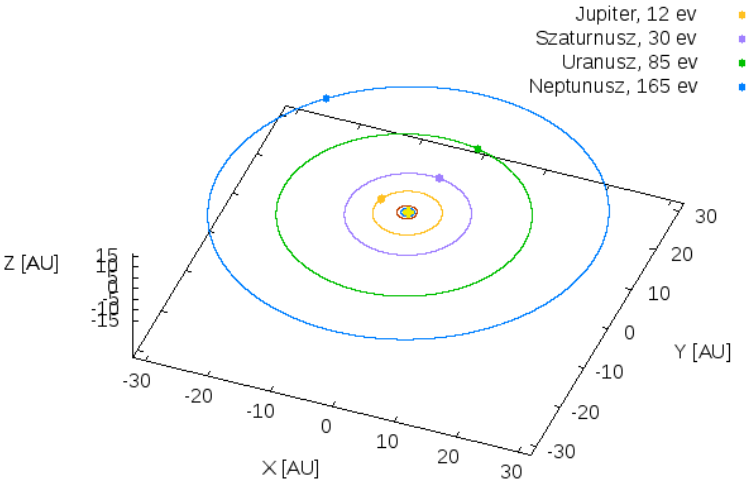
A Merkúr mozgása (animáció)



A belső bolygók mozgása (animáció)



A külső bolygók mozgása (animáció)



Kepler törvények:

- I. törvény: A bolygók ellipszis pályákon keringenek, melyeknek egyik gyújtópontjában van a Nap.

- II. törvény: A Naptól egy adott bolygóhoz húzott vezérsugár egységnyi idő alatt mindig ugyanakkora területet súrol.

- III. törvény: A bolygók keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az elliptikus pályáik félnagytengelyeinek köbei.

Kéttest-probléma:

- Határozzuk meg két pontszerű test mozgását, ha köztük csak a Newton-féle gravitációs erő hat.

  A következőkben $\boldsymbol{r}_1$ és m_1 az egyik tömegpont helyvektora és tömege, $\boldsymbol{r}_2$ és m_2 a másik tömegpont helyvektora és tömege, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $|\boldsymbol{r}| = r$ és k a Gauss-féle gravitációs állandó.

  A két Newton egyenlet:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- Tömegközépponti rendszerben dolgozunk.
- A probléma egycentrum-problémára redukálódik.

  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ választással, a megoldandó egyenlet:

  $$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

  Egy $(m_1 + m_2)$ tömegű test gravitációs terében mozgó egységnyi tömegű test mozgásegyenlete.

- Az egycentrum-probléma differenciálegyenlet rendszere hatodrendű, ezért az egyértelmű megoldáshoz 6 független paramétert kell megadni.

- pályaelemek:
  - a : fél nagytengely
  - e : excentricitás
  - i : inklináció
  - ω : a pericentrum argumentuma
  - Ω : a felszálló csomó hossza
  - τ : a pericentrum-átmenet időpontja

- Az első öt geometriai információt hordoz: pálya méret (a), pálya alak (e), pálya térbeli helyzete (i, ω, Ω) (egy x, y, z Descartes-féle koordinátarendszerben). A τ pedig a mozgás dinamikájával kapcsolatos.

- Az bolygók ellipszis pályájának alakja még zárt alakban számítható. A pálya egyenlete a mozgás síkjában felvett 2D-s polár koordináta rendszerben, melynek origója a centrum:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot cos(v)}$$

Ahol r a centrumtól mért távolság, v a nagytengellyel bezárt szög.

- A bolygók mozgásának dinamikai leírását adó $\boldsymbol{r}(t)$ függvényt már nem tudjuk felírni zárt alakban, ehhez iteráció szükséges.

- $\boldsymbol{r}(t)$ számítása:

  - bevezetjük:

$$E = \arccos\left(\frac{e + \cos(v)}{1 + \cos(v)}\right)$$

  - Kepler-egyenlet:

$$E - e \cdot \sin(E) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau) = M$$

Iterációval számolható!

  - Idő függvényében meghatározhatjuk a v-t. v függvényében pedig már ismerjük r-t. $r(t)$ meghatározható.

- Feladat: Adott M-ekhez E-ket keresni.

- Koordináták, és koordináta deriváltak számítása:

$$v = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)\right)$$

$$r = 1 - e \cdot \cos(E)$$

$$\xi = r \cdot \cos(v) \qquad \eta = r \cdot \sin(v)$$

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \cdot \sin(v) \qquad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \cdot (e + \cos(v))$$

- ξ és η azok a Descartes koordináták, amikhez az r és v polár koordinátákat rögzítettük.

- Az eredeti x, y, z Descartes-koordinátákra való áttérés:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(\omega, \Omega, i) & Q_x(\omega, \Omega, i) \\ P_y(\omega, \Omega, i) & Q_x(\omega, \Omega, i) \\ P_z(\omega, i) & Q_z(\omega, i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(\omega, \Omega, i) & Q_x(\omega, \Omega, i) \\ P_y(\omega, \Omega, i) & Q_x(\omega, \Omega, i) \\ P_z(\omega, i) & Q_z(\omega, i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$$

- Iteráció:

  - Kepler egyenlet 0-ra rendezve:

$$f(E) = E - e \cdot \sin(E) - M = 0$$

  - Newton-módszer:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} = E_i - \frac{E_i - e \cdot \sin(E_i) - M}{1 - e \cdot \cos(E_i)}$$

Megoldás egyértelmű:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cdot \cos(E) > 0$$

mert ellipszis esetén $e < 1$.

- Kezdeti feltétel:

  - $\frac{df(E)}{dE} = 1 - e \cdot \cos(E) > 0$, azaz $f(E)$ szig. monoton növő függvénye E-nek.

  - $f(M) < 0$ és $f(M+e) > 0$

  - Smith-formula:

$$E_0 = M + \frac{e \cdot \sin(M)}{1 - \sin(M+e) + \sin(M)}$$