

Analiza danych z rezonansowego detektora fal grawitacyjnych Nautilus

P. Astone, K. Borkowski, P. Jaranowski, A. Królak, M. Piętka, A. Pisarski

Przedmiot poszukiwań: ciągła, prawie monochromatyczna fala grawitacyjna

Możliwe źródło: wirująca gwiazda neutronowa o niesymetrycznym osiowo rozkładzie masy

Sygnał:

- deterministyczny, dobrze określony w czasie
- stabilny, obecny w danych z innych detektorów

- Detektor rejestruje fale z dowolnego kierunku (choć nie z tą samą czułością)
- Faza i amplituda są modulowane przez ruch detektora względem SSB – w razie stwierdzenia sygnału można określić położenie źródła

Używając jednego ciągu danych przeszukujemy całe niebo. Źródłem fali mogą być nieznane dotąd obiekty

Analiza danych z detektora Explorer

Zbadaliśmy 3 ciągi danych o długości 2 dni, pochodzące z dłuższego, 13-dniowego ciągu

Konkluzja: górne ograniczenie na bezwymiarową amplitudę fali w przeziale czułości detektora (921,00 – 921,76 Hz) wynosi

$$1 \times 10^{-22}$$

Poszukiwaliśmy koincydencji w przebadanych ciągach (wynik negatywny)

Metoda filtru dopasowanego

Ewentualny sygnał jest ukryty w szumie. Korelujemy „zaszumiony” ciąg danych ze wzorcem dopasowanym do sygnału, który spodziewamy się znaleźć.

Ciąg danych x tworzy dyskretny proces stochastyczny, opisywany pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Obecność sygnału **zmienia** ten rozkład

Testowanie hipotezy statystycznej

- H_0 : brak sygnału, tylko szum (gęstość $p_0(x)$)
- H_1 : sygnał obecny w szumie (gęstość $p_1(x)$)

Mając podany ciąg x musimy rozstrzygnąć, która hipoteza jest prawdziwa

Możliwe błędy:

- fałszywy alarm
- fałszywe przeoczenie

Podejście Neymana-Pearsona

Maksymalizujemy **prawdopodobieństwo detekcji** (1–prawdop. przeoczenia), przy zadanym prawdopodobieństwie fałszywego alarmu α oraz wiarygodności:

$$\Lambda(x) := \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$$

Jeśli $\Lambda(x)$ przekracza progową wartość Λ_0 (zależną od α), to przyjmujemy hipotezę H_1 (wykrycie sygnału)

Filtr dopasowany

Szum: addytywny, stacjonarny, gaussowski proces stochastyczny o zerowej wartości średniej

Filtr dopasowany (liniowa operacja na danych):

$$\log \Lambda(x) = (x|h) - \frac{1}{2} (h|h) ,$$

gdzie h – poszukiwany sygnał,

$$(x|y) := 4\text{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{x}(f)\tilde{y}^*(f)}{\tilde{S}(f)} \mathrm{d}f$$

Estymacja parametrów sygnału

Sygnał zależy od nieznanych z góry parametrów

$$\theta = \{\alpha, \delta, \omega_0, \omega_1, \quad \longleftarrow \xi$$
$$h_{0\times}, h_{0+}, \phi_0, \psi\} \quad \longleftarrow \eta$$

Szukamy maksimum $\Lambda(\theta, x)$ względem θ .

Estymatory η można znaleźć analitycznie.

Zredukowany iloraz wiarygodności
($\mathcal{F}$ -statystyka) zależy tylko od ξ :

$$\mathcal{F}(\xi, x) := \log \Lambda(\xi, \hat{\eta}, x)$$

Wyszukiwanie „kandydatów”

- Szukamy lokalnych maksimów $\mathcal{F}$ w przestrzeni parametrów ξ
- *Coarse search*: początkowo obliczamy $\mathcal{F}$ na dyskretnym zbiorze punktów („bank filtrów”)
- Takie filtry są suboptymalne - obniżamy próg
- Parametry, dla których $\mathcal{F}$ przekracza próg, nazywamy *kandydatami* (*triggerami*)
- *Fine search*: lokalne maksimum w pobliżu każdego kandydata; algorytm Nelder-Mead

Funkcja korelacji $\mathcal{F}$ -statystyki

Dla dowolnego sygnału ξ w przestrzeni parametrów powinien istnieć filtr ξ' taki, że

$$\mathcal{C}(\xi, \xi') > C_0$$

Przy $\xi = \xi'$ funkcja $\mathcal{C}$ ma maksimum: $\mathcal{C}(\xi, \xi) = 1$

$$\mathcal{C}(\xi, \xi') \simeq 1 - \tilde{\Gamma}_{ij} \tau_i \tau_j,$$

gdzie $\tau = \xi' - \xi$. Zredukowana macierz informacji Fishera $\tilde{\Gamma}_{ij}$ zależy od przyjętego modelu sygnału

Funkcja korelacji $\mathcal{F}$ -statystyki

Dla dowolnego sygnału ξ w przestrzeni parametrów powinien istnieć filtr ξ' taki, że

$$\mathcal{C}(\xi, \xi') > C_0$$

Przy $\xi = \xi'$ funkcja $\mathcal{C}$ ma maksimum: $\mathcal{C}(\xi, \xi) = 1$

$$\mathcal{C}(\xi, \xi') \simeq 1 - \tilde{\Gamma}_{ij} \tau_i \tau_j,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right\rangle$$

Model fazy sygnału

Faza sygnału docierającego do detektora:

$$\Phi(t, \xi) = \omega_0 t + \omega_1 t^2 + \alpha_1 A_1(t) + \alpha_2 A_2(t),$$

gdzie $\xi = (\omega_0, \omega_1, \alpha_1, \alpha_2)$.

α_1, α_2 zależą od położenia źródła na niebie;

$A_1(t), A_2(t)$ — ruch detektora względem SSB

Elipsoida korelacji

Problem pokrycia przestrzeni elipsoidami

$$\tilde{\Gamma}_{ij}\tau_i\tau_j = 1 - C_0$$

W liniowym modelu fazy $\tilde{\Gamma}_{ij}$ nie zależy od ξ ,
zatem bank filtrów może być zadany przez
pewną wielowymiarową sieć

Optymalne pokrycie ma najmniejszą grubość
(grubość pokrycia := obj. elipsoidy / obj. komórki)

Elipsoida korelacji — c.d.

Nowe współrzędne χ w przestrzeni parametrów:
elipsoida korelacji przechodzi w sferę
o promieniu $R_0^2 = 1 - C_0$

$$\tau = M\chi,$$

gdzie $M = U_0 D_0^{-1}$ jest liniową transformacją (nie zmienia grubości pokrycia)

Mamy więc problem pokrycia przestrzeni **sferami**

Optymalne pokrycia

- Najcieńsze **możliwe** pokrycia znane są tylko w wymiarach 1, 2
- W wymiarach do 5 włącznie znane są najcieńsze pokrycia będące **sieciami**
- W wielu wymiarach >5 najcieńsze **znane** pokrycia są sieciami
- Optymalna siatka w 4 wymiarach, A_4^* , ma grubość pokrycia 1,7655

Sieć z więzami

Nasza sieć filtrów musi spełniać więzy:

1. węzły sieci muszą pokrywać się z częstościami Fouriera — ustalony jeden z wektorów bazy $a_0 = (\Delta\omega_0, 0, 0, 0)$
2. drugi wektor bazy musi leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie częstości i spindownu, $a_1 = (p, r, 0, 0)$

(składowe a_0, a_1 podane we współrzędnych τ)

Obecna siatka

Konstrukcja sieci „hipersześciiennej”

- $\{e_i\}_{i=0,\dots,3}$ — baza kanoniczna

$$a_i = \mu M e_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

- czynnik skalowania μ z warunku, aby sieć zadawała pokrycie przestrzeni elipsoidami
- $a_1 \rightarrow P a_1$, gdzie P — rzutowanie na pł. $(\omega_0 \omega_1)$
- skalowanie $a_i \rightarrow \kappa a_i$ dla $i = 2, 3$

Grubość $\simeq 5,6$

Nowa propozycja siatki

Punkt wyjścia: sieć A_4^* z bazą $\{f_i\}_{i=0,\dots,3}$

- $L = \{\sum k_i f_i, k_i \in \mathbb{Z}\}$ — zbiór wszystkich wektorów sieciowych A_4^*
 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ — rosnący ciąg modułów L
- znajdujemy λ_m takie, że $\lambda_m \geq |M^{-1}a_0|$, ale $\lambda_{m-1} < |M^{-1}a_0|$.
- Niech l_m — wektor sieciowy, którego moduł wynosi λ_m . Zastępujemy $f_0 \rightarrow l_m$

Nowa propozycja siatki — c.d.

- $\mathcal{O}_1$ — transformacja ortogonalna taka, że

$$\mathcal{O}_1 f_0 \parallel M^{-1} a_0$$

- $\mathcal{S}$ — macierz diagonalna o elementach $(|M^{-1} a_0|/\lambda_m, 1, 1, 1)$

- $\mathcal{O}_2$ — transformacja ortogonalna taka, że

$$\mathcal{O}_2(1, 0, 0, 0) = l_m/\lambda_m$$

- $\mathcal{O}_2 \mathcal{S} \mathcal{O}_2^{-1}$ — skalowanie w kierunku l_m

Nowa propozycja siatki — c.d.

- Siatka dana przez

$$f'_i = \mathcal{O}_2 \mathcal{S} \mathcal{O}_2^{-1} \mathcal{O}_1 f_i$$

spełnia więz (1) i ma grubość

$$1,7655 \frac{\lambda_m}{|M^{-1}a_0|}$$

Nowa propozycja siatki — c.d.

- Wiąż (2) spełnimy za pomocą transformacji ortogonalnej $\mathcal{O}_3$, której wektorem własnym jest l_m (obrót wokół osi l_m) takiej, że wektor

$$M\mathcal{O}_3\mathcal{O}_1f_1$$

leży w płaszczyźnie $(\omega_0\omega_1)$.

- Siatka spełniająca oba więzy:

$$a_i = M\mathcal{O}_2\mathcal{S}\mathcal{O}_2^{-1}\mathcal{O}_3\mathcal{O}_1f_i$$

Grubość $\simeq 2,1$

Analiza danych z Nautilusa

- Dostępne dane: cały rok 1991
- Pasmo 1,22 Hz od 922,10 Hz
- Podział na dwudniowe segmenty (badamy 90 „zdecydowanie dobrych”)
- 58 mln filtrów/segment (nowa sieć — 22 mln)
- każdy filtr: 2 zespolone FT o długości 2^{19}
- Wymagania obliczeniowe na 1 segment:
 $\simeq$ 2 tygodnie pracy 32 CPU (ICM/halo)

Zasoby obliczeniowe

- IFT UwB: 8+5 CPU
- ICM UW: 32 CPU
- INFN-CNAF (Bologna): 130 CPU
- AEI (Golm): max. 340 CPU

Zakładając 100% wykorzystanie czasu CPU,
moc obliczeniowa tych maszyn pozwoliłaby
zbadać 90 ciągów danych w mniej niż pół roku

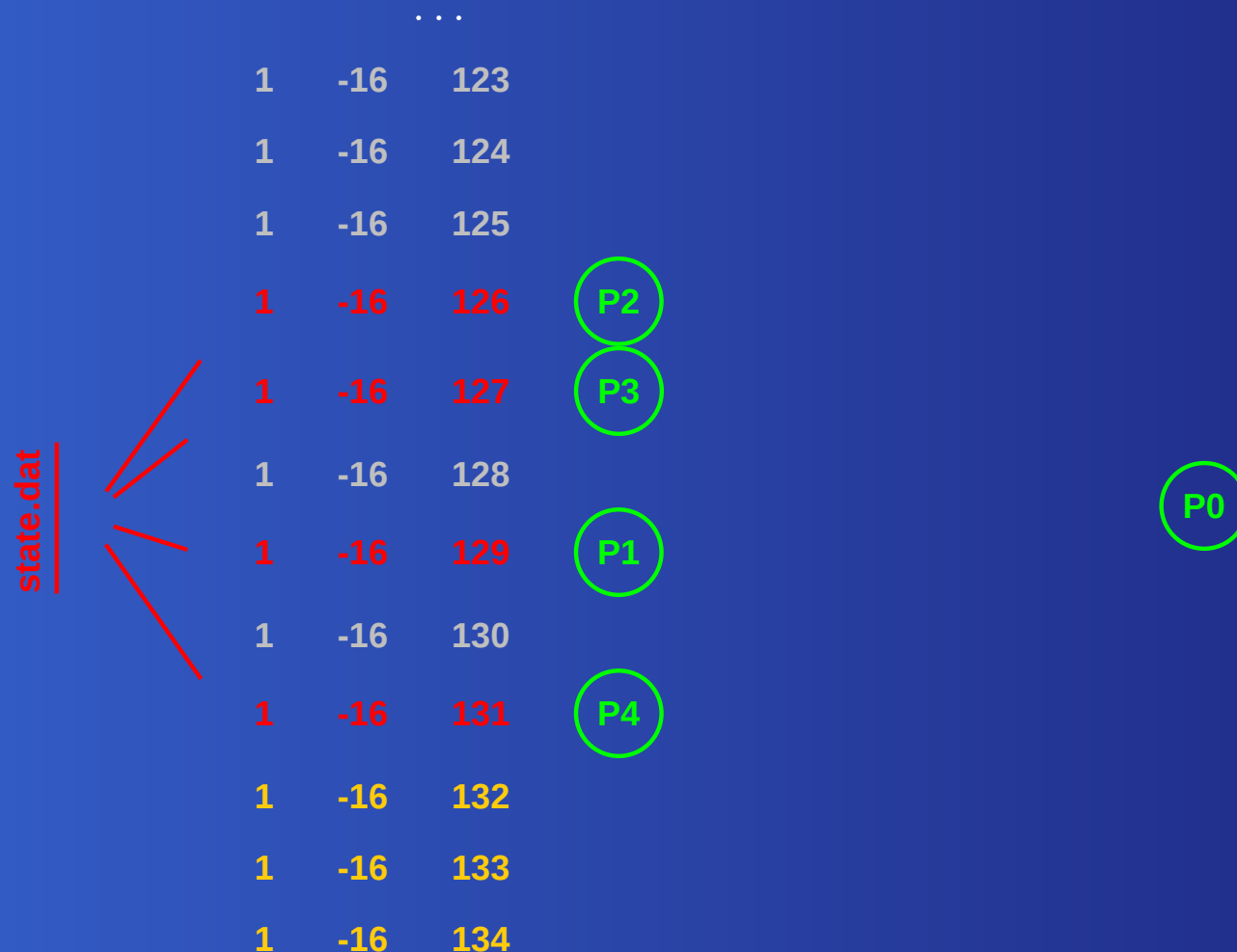
Zrównoleglenie obliczeń: MPI

Podział dziedziny — banku filtrów

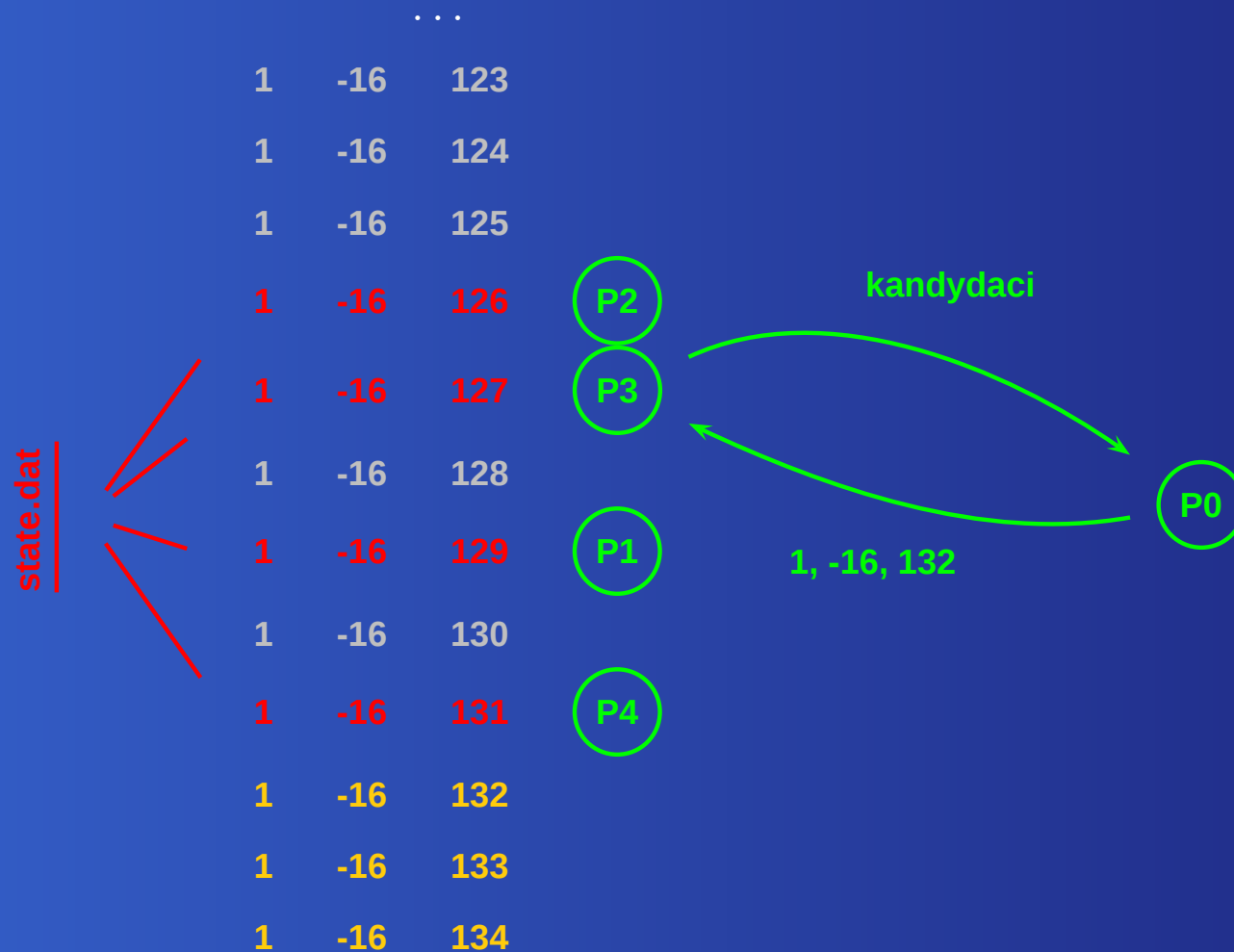
Proces sterujący:

- wczytuje dane i rozsyła do **procesów roboczych** (MPI_Bcast)
- tworzy kolejkę filtrów
- zbiera wyniki i przydziela nowe filtry (MPI_Recv, MPI_Send)
- zapisuje pliki wynikowe oraz stan kolejki

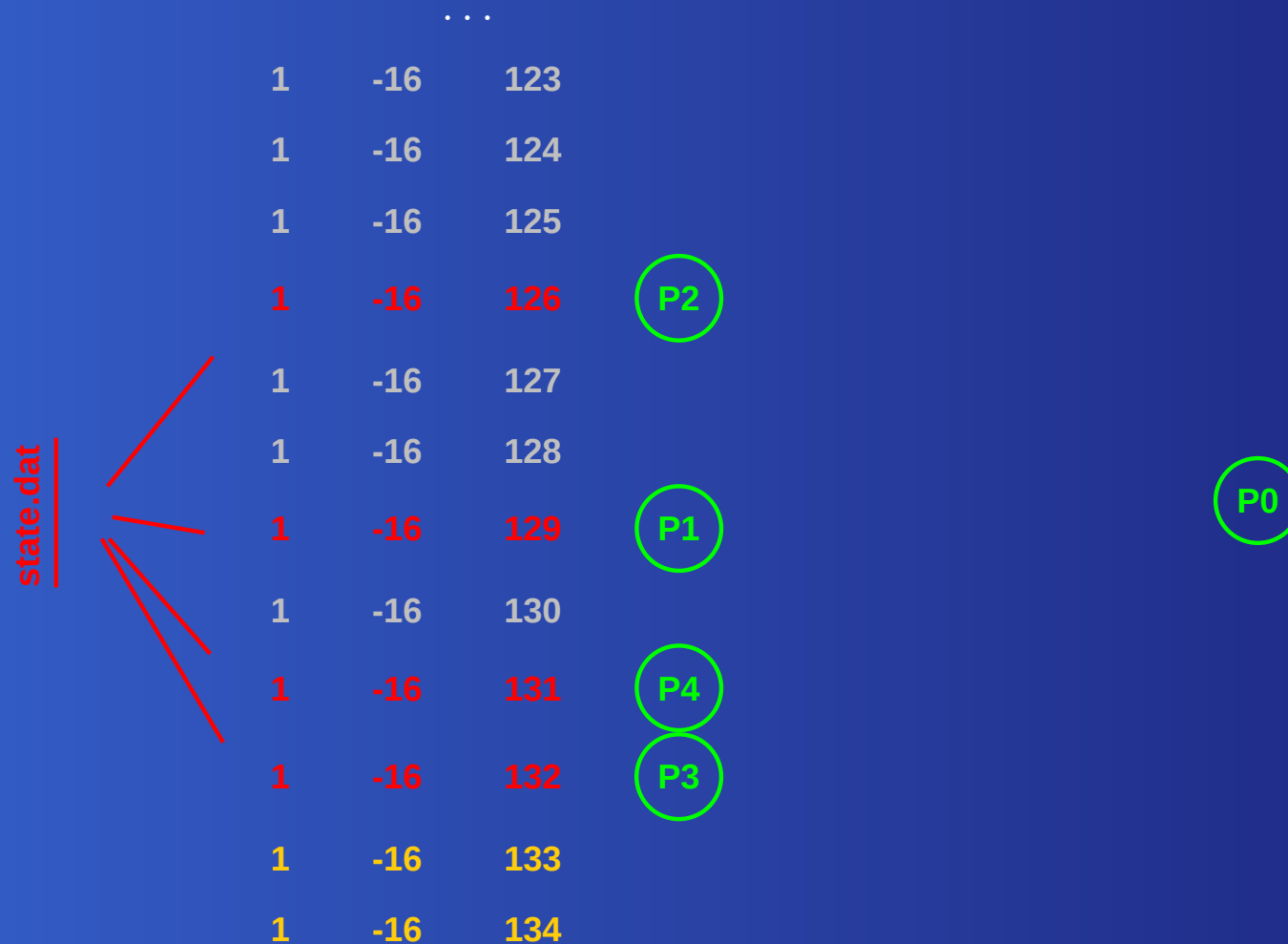
Zrównoleglenie obliczeń — c.d.



Zrównoleglenie obliczeń — c.d.



Zrównoleglenie obliczeń — c.d.



Zrównoleglenie obliczeń — c.d.

- Operacje I/O, komunikacja kolektywna: tylko przy starcie
- Procesy robocze działają niezależnie (komunikacja tylko z procesem sterującym)
- Procesy robocze nie korzystają z dysku

$$\frac{\text{komunikacja}}{\text{obliczenia}} \rightarrow 0 \quad :)$$

Postęp obliczeń

