

Krzywizna horyzontu

Curvature of the horizon. *Abstract:* Followers of the flat Earth idea frequently use quantities like distance to the horizon and its dip. Mathematical expressions for these can be easily derived and formulae for good practical approximations are well known in literature. For example the dip in arc minutes is calculated as $1.78 \cdot \sqrt{h}$, where h , the height of the observer, is expressed in meters. Such formulae are also derived in this article but what is novel here is the formula for curvature of the horizon as seen from the perspective of an observer. If the observer sees a part of the horizon contained within the angle γ then the horizon arc in the middle of this field of view will be seen higher than the ends of the arc (i.e. above the chord) by the angle (again in arc minutes):

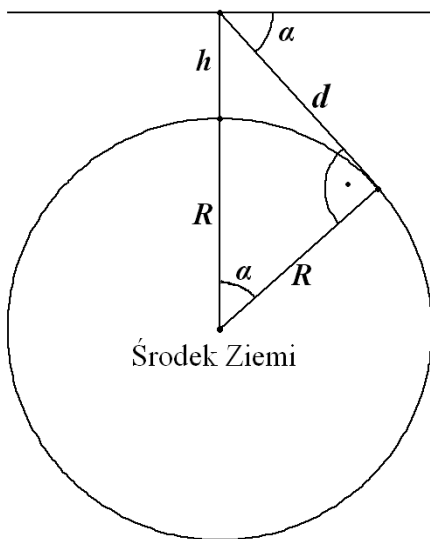
$$g = 1.78 \cdot \sqrt{h} \cdot [1/\cos(\gamma/2) - 1].$$

This is just the dip scaled by the factor $1/\cos(\gamma/2) - 1$. This formula proves quite accurate and thus it can be safely used by all flat earthers. Assessment of its accuracy can be made by comparing the results it gives with the results obtained from exact solution as given in the table No 2 below (Tabela 2). For example, this formula errs by less than 1% for $h \leq 100\,000$ m and $\gamma = 90^\circ$, or $h \leq 50\,000$ m and $\gamma = 120^\circ$, or $h \leq 10\,000$ m and $\gamma = 150^\circ$. Actual observations presented in [this web site](#) are shown to agree with our theoretical calculations.

Wyznawcy płaskiej Ziemi często powołują się na brak dowodów na kulistość Ziemi, w szczególności na to, że na co dzień nie widać krzywizny horyzontu nawet na sporej wysokości. Niedawno oglądałem wideo pewnej osoby z Polski, która planowała wysłać balon z aparaturą dostatecznie wysoko i pokazać, że tej krzywizny tam też nie widać. Trudność z dostrzeżeniem zakrzywienia gołym okiem albo na zdjęciach wynika po prostu z małości tego zakrzywienia. Niemniej sam fakt obniżenia horyzontu był wielokrotnie sprawdzony doświadczalnie. Dobry przykład naziemnych pomiarów teodolitem przedstawiono na wideo <https://ebd.cda.pl/620x368/23856537c>. Balony stratosferyczne zwykle unoszą się na wysokość 20-40 km (rekord wynosi 43561 m).

Wzory na obliczanie odległości horyzontu i jego obniżenia względem płaszczyzny prostopadłej do pionu w miejscu obserwatora są stosunkowo proste – łatwo można je znaleźć w literaturze. Jednak wyliczenie spodziewanej wielkości wybrzuszenia linii horyzontu na zdjęciach wycinka horyzontu jest pewnym wyzwaniem, co skłoniło mnie do zajęcia się przedstawionymi tu ścisłymi rozwiązaniami. Pozwolą one solidniej zaplanować ewentualne próby eksperymentalnego potwierdzenia lub zaprzeczenia kulistości Ziemi.

Odległość i obniżenie horyzontu



Odległość i obniżenie horyzontu łatwo wyznaczymy opierając się na rysunku obok. Jeśli założymy, że powierzchnia Ziemi jest sferą o promieniu R , widnokrąg, albo horyzont, będzie okręgiem o promieniu $r = R \cdot \sin \alpha$, gdzie α jest obniżeniem horyzontu. Jest to jednocześnie promień krzywizny widnokręgu. Obniżenie horyzontu to kąt między płaszczyzną prostopadłą do kierunku pionu w miejscu obserwatora a kierunkiem na horyzont. Obliczymy go z zależności $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha = R/(R + h)$, gdzie π jest stałą matematyczną (3.14159...), która, gdy wyraża kąt w radianach, odpowiada wartości 180° . Mamy więc

$$\alpha = \arccos \frac{R}{R+h} = \arcsin \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2} \right\}$$

Równie prosto wyliczymy odległość horyzontu, korzystając ze wzoru Pitagorasa $d^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2h \cdot R + h^2$, skąd

$$d = \sqrt{2h \cdot R + h^2},$$

albo z obliczonego już kąta α

$$d = R \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie R , h i d są wyrażone w tych samych jednostkach, a α – w radianach.

Te wzory są ściśle i pozostają słuszne nawet dla satelitów, ale ponieważ w praktyce h jest dużo mniejsze od R , więc także α jest zwykle małe, to dla tej wielkości możemy przyjąć przybliżenia:

$$\alpha \approx \sin \alpha = d/(R + h) = (2hR + h^2)^{1/2}/(R + h) \approx (2h/R)^{1/2} \equiv \sqrt{2h/R}.$$

Przyjmując dla Ziemi $R = 6371000$ m (średni promień naszej planety) i zamieniając jednostki z radianów na minuty łuku (czynnik $180 \cdot 60/\pi$), dostajemy

$$\alpha \approx (180 \cdot 60/\pi) \cdot \sqrt{2/R} \cdot \sqrt{h} = 1.926 \cdot \sqrt{h},$$

gdzie h jest wyrażone w metrach, a α w minutach. W literaturze można spotkać takie przybliżenie, ale z czynnikiem przed pierwiastkiem wynoszącym 1.8, co w znacznym stopniu kompensuje zjawisko refrakcji atmosferycznej (patrz niżej).

Tabela 1. pokazuje wyliczenia tych dwóch wielkości dla kilku wysokości h nad powierzchnią Ziemi. Widać z niej, że przybliżenie $1.926\sqrt{h}$ jest bardzo dobre do

wysokości 100 km a nawet kilkaset kilometrów. Jeszcze dla wysokości 1000 km błąd wynosi tylko $100 \cdot (1926.0 - 1811.6) / 1811.6 = 6 \%$.

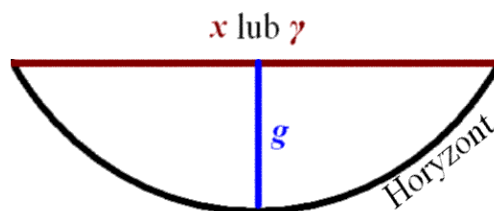
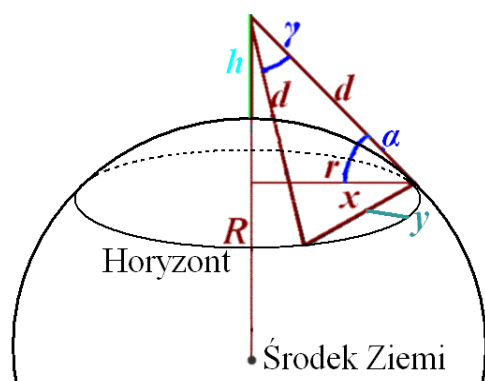
Tabela 1. Obniżenie, α , i odległość, d , horyzontu w funkcji wysokości obserwatora nad Ziemią, h (r jest promieniem widnokręgu) liczone w sposób przybliżony i ścisły

h [m]	$1.926 \cdot \sqrt{h}$ [']	$\arccos[R/(R+h)]$ [']	d [m]	r [m]
10	6.1	6.1	11288	11288
100	19.3	19.3	35696	35695
1000	60.9	60.9	112884	112867
10000	192.6	192.5	357099	356539
25000	304.5	304.1	564955	562747
50000	430.7	429.3	799749	793522
100000	609.1	605.2	1133225	1115713
500000	1361.9	1319.6	2573130	2385884
1000000	1926.0	1811.6	3707020	3204100
10000000	6090.5	4025.9	15080450	5868765
100000000	19260.0	5194.0	106180035	6359562

Krzywizna horyzontu

Gdy znajdujemy się dokładnie w środku okręgu, każdy odcinek okręgu widzimy tak samo jak jego cięciwę, tzn. jako odcinek linii prostej. Jednak patrząc na taki odcinek z dowolnej wysokości, widzimy go jako łuk nad jego cięciwą. Wybrzuczenie nad cięciwą jawi się tym wyraźniej, im patrzymy z większej wysokości i obejmujemy wzrokiem większy kąt. Jeśli robimy zdjęcia horyzontu z wysokości h (patrz rysunki poniżej) i nasz aparat czy kamera ma pole widzenia (kąt) γ , krańce części horyzontu widocznego na otrzymanym obrazie (zdjęciu) będą odległe od urządzenia (aparatu) tak jak cały horyzont, tj. o d , a odległość między nimi, czyli długość cięciwy, x , wyniesie:

$$x = 2d \cdot \cos(\pi/2 - \gamma/2) = 2(2h \cdot R + h^2)^{1/2} \sin(\gamma/2).$$



Środek cięciwy łączącej wspomniane krańce znajdzie się w odległości od obserwatora $d \cdot \cos(\gamma/2)$. Odległość, r' , tego środka od linii pionu oraz obniżenie kierunku na ten środek z aparatu względem płaszczyzny horyzontu, α' , wyniosą odpowiednio:

$$r' = d [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\gamma/2)]^{1/2} \text{ oraz}$$

$$\alpha' = \arccos[r'/(d \cos(\gamma/2))] = \arcsin[\sin(\alpha)/\cos(\gamma/2)].$$

Nieoczywiste prawostronne wyrażenie otrzymuje się łatwo z zależności $\arccos x = \arcsin[\sqrt{(1 - \cos^2 x)}]$.

Na płaszczyźnie horyzontu wspomniana odległość odpowiada odcinkowi

$$y = r - r' = R \cdot \sin \alpha - r' = d \cdot \cos \alpha - r'.$$

Z punktu obserwacyjnego szczyt wybrzuszenia horyzontu będzie widoczny nad cięciwą w odległości kątowej $g = \alpha' - \alpha$. Mamy na tę wielkość ściśle wyrażenie

$$g = \arcsin[\sin(\alpha)/\cos(\gamma/2)] - \alpha,$$

ale dla małych kątów α (co w praktyce jest słuszne dla kątów γ mniejszych od 120° nawet do wysokości $h = 50\,000$ m) możemy je uprościć do

$$g \approx \alpha/\cos(\gamma/2) - \alpha = \alpha [1/\cos(\gamma/2) - 1]$$

uzyskując ostatecznie prosty wzór (dający wynik w radianach):

$$g \approx \sqrt{[2h/R]} \cdot [1/\cos(\gamma/2) - 1].$$

Wyrażając h w metrach zaś całość skalując tak jak wcześniej α , dostajemy oryginalny wzór (dający wynik g w minutach łuku):

$$g \approx 1.926 \cdot \sqrt{h} \cdot [1/\cos(\gamma/2) - 1].$$

Na miarę wybrzuszenia horyzontu możemy przyjąć procentowy stosunek kąta g do kątowej odległości krańców horyzontu widocznych na zdjęciu, czyli $100 \cdot g/\gamma$.

Wpływ refrakcji i praktyczne wzory

Refrakcja (załamanie światła na granicy warstw atmosfery o różnych współczynnikach załamania, które są zależne głównie od temperatury powietrza i ciśnienia) sprawia, że z wysokości większych od zera można „zajrzeć” nieco poza horyzont geometryczny – tym dalej, im większa wysokość. Na wysokościach sięgających stratosfery można się spodziewać poprawki na refrakcję ok. 0.5° . W atmosferze promień światła biegnie po krzywej wypukłej ku górze. Oznacza to, że promień styczny do kulistej Ziemi w geometrycznym miejscu odległym od

obserwatora o d trafi nieco poniżej obserwatora (znajdującego się na wysokości h), co jest równoważne zmniejszeniu kąta α . W obliczeniach odległości i obniżenia horyzontu można to skompensować zwiększając promień Ziemi, R . Jeden z modeli kompensuje refrakcję przez zwiększenie promienia Ziemi o czynnik $7/6$, co prowadzi do przybliżeń:

$$\alpha \approx 1.926 \cdot \sqrt{(6/7)} \cdot \sqrt{h} = 1.78 \cdot \sqrt{h}$$

$$d \approx \sqrt{[2h \cdot (7/6) \cdot R + h^2]} = \sqrt{[(7/3) \cdot h \cdot R + h^2]} \approx 3856 \cdot \sqrt{h}.$$

Jeśli w tych wzorach h wyrazimy w metrach, dostaniemy α w minutach łuku, a d w metrach. Wyrażając d w milach morskich (1 Mm = 1852 m; $3856/1852 = 2.08$), otrzymamy wzór stosowany w nawigacji: $d = 2.08 \cdot \sqrt{h}$ (np. [Navipedia](#)). Te przybliżenia zawodzą jednak dla dużych wysokości, powiedzmy powyżej 100 km. Podobnie można uwzględnić refrakcję we wzorze na wybrzuszenie g :

$$g \approx \sqrt{[2h \cdot (6/7)/R] \cdot [1/\cos(\gamma/2) - 1]} = 1.78 \cdot \sqrt{h} \cdot [1/\cos(\gamma/2) - 1].$$

Obliczenia kąta $g = \alpha' - \alpha$ według ścisłych wzorów dla kilku wysokości h (w metrach) i wybranych pól widzenia γ (w stopniach) zawiera Tabela 2. Brak procentowej wartości w tej tabeli oznacza, że w polu widzenia znajduje się cały horyzont; wtedy też $r' = 0$, a cięciwa staje się średnicą widnokręgu, $x = 2r$.

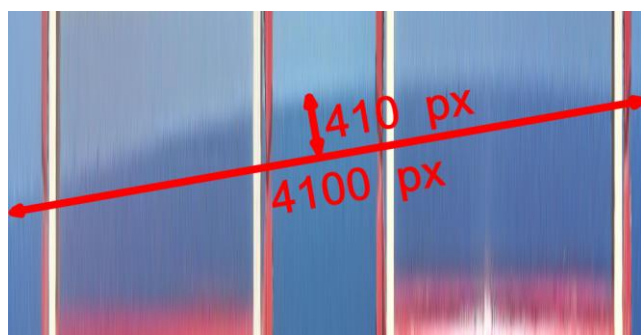
Tabela 2. Obserwowane wybrzuszenie horyzontu, g (wyrażone w minutach łuku i procentach kąta, pod jakim widać cięciwę), ponad cięciwą w funkcji wysokości obserwatora nad Ziemią, h , dla wybranych pól widzenia, γ .

Obliczenia wykonano według ścisłych wzorów z uwzględnieniem średniej refrakcji.

Wysokość h [m]	Pole widzenia, γ									
	30°		60°		90°		120°		150°	
	[']	[%]	[']	[%]	[']	[%]	[']	[%]	[']	[%]
10	0.199	0.011	0.872	0.024	2.34	0.043	5.64	0.078	16.1	0.179
100	0.629	0.035	2.759	0.077	7.39	0.137	17.8	0.248	51.1	0.567
1000	1.989	0.111	8.724	0.242	23.4	0.433	56.4	0.783	161.6	1.796
10000	6.293	0.350	27.60	0.767	73.9	1.369	178.7	2.482	514.8	5.720
25000	9.956	0.553	43.68	1.213	117.1	2.168	283.5	3.937	824.1	9.156
50000	14.09	0.783	61.86	1.718	166.0	3.074	403.1	5.598	1191.2	13.24
100000	19.97	1.109	87.72	2.437	235.9	4.368	576.4	8.006	1771.0	19.68
500000	45.34	2.519	200.6	5.573	549.7	10.18	1432.9	19.90	4172.9	—
1000000	65.32	3.629	292.0	8.111	823.6	15.31	2560.0	35.56	3708.8	—
5000000	168.2	9.344	868.7	24.13	2202.9	—	2202.9	—	2202.9	—
10000000	282.1	15.68	1514.2	—	1514.2	—	1514.2	—	1514.2	—

Te obliczenia pokazują, że w praktyce wybrzuszenie horyzontu ponad cięciwą dla pól widzenia do 60° i wysokości punktu obserwacji do 10 km wynosi poniżej 1% z tych 60° (czyli 0.6°), jest więc słabo widoczne. W związku z tą małością krzywizny horyzontu w obecności częstych zniekształceń obrazu wynikających z niedoskonałości optyki aparatów fotograficznych (efekt „rybiego oka”) ważne jest, aby linia horyzontu (a raczej cięciwa) przebiegała możliwie dokładnie przez środek otrzymanego zdjęcia.

Zwolennicy płaskiej Ziemi twierdzą, że o braku zakrzywienia horyzontu można przekonać się, ustawiając nad brzegiem morza poziomo prostą deskę lub belkę na wysokości oczu. Załóżmy, że taka deska ma długość 3 m i jest umieszczona na wysokości 10 m nad poziomem morza, a my patrzymy na nią tak, żeby widzieć jej końce na horyzoncie, obejmując kąt widzenia horyzontu równy 60° . Znaczy to, że nasze oczy są w odległości 3 m od końców deski, a od jej środka $3 \cdot \cos(60^\circ/2) = 2.60$ m. Odczytany z Tabeli 2. kąt wybrzuszenia horyzontu wynosi w tym przypadku $g = 0.872'$ (ok. 0.024% z 60°), a obliczony według podanego wzoru przybliżonego $1.78 \cdot \sqrt{10} \cdot [1/\cos(30^\circ) - 1] = 0.870'$. Oznacza to dalej, że na odległości deski horyzont będzie wystawał ponad nią na $2.60 \cdot \text{tg } g = 0.0007$ m, a więc mniej niż 1 mm. Nawet przy idealnym spoziomowaniu deski raczej nie da się zauważyć tak małego zakrzywienia. Podobny rachunek dla pola widzenia $\gamma = 120^\circ$ (odległość oczu od środka deski wyniesie wtedy 0.87 m) daje tylko ok. dwukrotnie większe wybrzuszenie nad deskę: $0.87 \cdot \text{tg}(5.64') = 0.0014$ m, czyli 1.4 mm.



Na stronie [Left to right curve of the horizon](#) znajduje się zdjęcie horyzontu, widzianego przez szczeliny specjalnego przyrządu, wykonane z wysokości $h = 184$ m w polu widzenia $\gamma = 63.7^\circ$ (dane EXIF). Spodziewane wybrzuszenie wynosi więc $1.78 \cdot \sqrt{184} \cdot [1/\cos(63.7/2) - 1] = 4.3'$, co stanowi $(4.3/60)/63.7 \cdot 100 =$

0.11% pola widzenia. Na powiększonym w pionie o czynnik 100 fragmencie wspomnianego zdjęcia (obok) można zmierzyć (z błędem ok. 10%) wybrzuszenie o wartości ok. 410 px (pikseli) nad cięciwą o długości ok. 4100 px, czyli 0.1% pola widzenia. Jest to zgodne z oczekiwaną wartością 0.11% .

I jeszcze jedna uwaga dla „płaskoziemców”. To, że zdarza się zaobserwować jakieś obiekty daleko poza obliczonym horyzontem, wcale nie znaczy, że Ziemia nie jest kulą, bowiem podane tu wzory uwzględniają **średnią** refrakcję astronomiczną, a rzeczywista refrakcja zależy od temperatury i ciśnienia. Ponadto istnieją zjawiska takie jak [refrakcja ziemiska](#), miraże i fatamorgana.

K.M. Borkowski
Toruń, 17 maja 2024 r.