Pracownia astrofizyki teoretycznej 1

Wykład 1

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

PATEO 1 ©2025



Sprawy organizacyjne

- https://wwwold.astro.umk.pl/~mtarnopolski/home/students/pateo1/
- 45 godz. pracowni = prezentacja materiału + zadania rachunkowe + **praca własna**
- Harmonogram zajęć
- Konsultacje — termin podany w profilu pracownika w USOSie, po uprzednim umówieniu się przez maila:

  mariusz.tarnopolski [at] umk.pl

  Inne terminy i miejsca (np. Wydział Fizyki) również możliwe — po umówieniu się przez maila ze stosownym wyprzedzeniem (1–2 dni).

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa $G =$ średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa $G =$ średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa $G =$ średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa G = średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa G = średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa G = średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Sprawy organizacyjne — zaliczenie

- uczestnictwo w zajęciach (**maks. 3 nieuspr. nieob.**)
- zaliczenie wszystkich raportów $\Leftrightarrow$ zaliczenie przedmiotu
- na wykonanie każdego raportu będą **3 tyg.** (akademickie) licząc od zajęć, na których zostanie zadany $\equiv$ dniem oddania jest dzień odbywania się zajęć 3 tyg. później **(wyjątkiem raport nr 2., na który będą 4 tyg.)**
- zwolnienie lekarskie wydłuża czas na wykonanie raportu o $\lceil$liczba tygodni$\rceil$, na jaką zostało wystawione
- nieusprawiedliwione **opóźnienie w oddaniu raportu** o każdy kolejny **rozpoczęty** tydzień obniża jego finalną ocenę o 0.5
- złożony raport może być **jednokrotnie zwrócony do poprawy** bez obniżania oceny. Każda kolejna poprawa obniża finalną ocenę o 0.5. Czas na poprawę będzie ustalany indywidualnie ($\sim 1-4$ tyg.)
- ocena końcowa G = średnia arytmetyczna ocen g_i z n raportów ($\mathbb{E}n = 5$) pod warunkiem **złożenia i zaliczenia wszystkich raportów**:

$$G = \max\left\{2,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1,\ldots,g_n\}>2}\right\}$$

Plan ramowy

Rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą programów samodzielnie opracowanych oraz oprogramowania dostępnego w domenie publicznej (PYTHON). W szczególności:

- Analiza numeryczna planetarnego zagadnienia dwóch ciał oraz jego wariantów
- Analiza numeryczna rotacji asferycznego ciała niebieskiego (satelity planetarnego)
- Analiza numeryczna aspektów zagadnienia N ciał
- REBOUND (👉 temat pracy mgr)

Temat pracy mgr

Samozaburzanie orbity przez asferyczne ciało niebieskie

Celem projektu jest zbadanie jaki jest wpływ asferyczności kształtu ciała niebieskiego na swoją własną orbitę. Rozważania należy przeprowadzić w ramach mechanizmu sprzężenia spin-orbita. Archetypowym przykładem wysoce asferycznego ciała w Układzie Słonecznym jest Hyperion, który jednak obiega Saturna po tak szerokiej orbicie, że samozaburzenia są pomijalne. Innym układem, w którym należy się spodziewać znacznie silniejszych efektów, jest obiekt transneptunowy (47171) Lempo, który składa się z ciasnego układu podwójnego Lempo-Hiisi obieganego przez nieznacznie mniejsze ciało, Paha.

Wymagania: umiejętność programowania (PYTHON); ogólna wiedza nt. astronomii, mechaniki klasycznej i mechaniki nieba.

Dodatkowe informacje: mariusz.tarnopolski [at] umk.pl lub osobiście (pok. AA 15, Instytut Astronomii w Piwnicach).

Literatura i zasoby

1. H. Goldstein, P. Poole & J. L. Safko, *Classical Mechanics: third edition*, Addison Wesley 2001
2. J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, The Macmillan Company, New York 1962 (1st Ed.); Willmann-Bell, Richmond 1992 (2nd Ed.)
3. A. Morbidelli, *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*, CRC Press 2002
4. W. Greiner, *Classical Mechanics. Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer Berlin Heidelberg 2010
5. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, *Numerical recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press 2007 (3rd Ed.)

Literatura i zasoby

6. P. G. L. Leach & G. P. Flessas, *Generalisation of the Laplace-Runge-Lenz Vector*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 10, 340–423 (2003)
7. V. M. Gorringe & P. G. L. Leach, *Conserved Vectors and Orbit Equations for Motions in Two and Three Dimensions*, [w:] *Finite Dimensional Integrable Nonlinear Dynamical Systems*, Eds.: P. G. L. Leach, W. H. Steeb, World Scientific Publ., Singapore, 190–204 (1988)
8. J. Wisdom, S. J. Peale & S. Mignard, *The Chaotic Rotation of Hyperion*, Icarus 58, 137–152 (1984)
9. M. Tarnopolski, *Rotation of an oblate satellite: Chaos control*, Astronomy and Astrophysics 606, A43 (2017)
10. M. Tarnopolski, *Influence of a second satellite on the rotational dynamics of an oblate moon*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 127, 121–138 (2017)

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.
W polu zachowawczej siły centralnej zachowywany jest moment pędu:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

w szczególności też jego długość, $L = r^2\dot{\varphi} \in \mathrm{const}$ (φ — kąt w układzie biegunowym). Ponadto, skoro $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$ to ruch odbywa się w płaszczyźnie.

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.
W polu zachowawczej siły centralnej zachowywany jest moment pędu:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

w szczególności też jego długość, $L = r^2\dot{\varphi} \in \text{const}$ (φ — kąt w układzie biegunowym). Ponadto, skoro $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$ to ruch odbywa się w płaszczyźnie.
Zachowywany jest też wektor Laplace'a-Rungego-Lenza (LRL; skierowany od ogniska ku apocentrum):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \qquad (*)$$

który nie daje 3 a tylko 2 stałe całkowania ponieważ zachodzi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$.

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Stałą całkowania, niebędącą niezależną całką ruchu, jest czas τ przejścia przez perycentrum mas m_1 i m_2 w równaniu Keplera:

$$\frac{2\pi}{T}(t - \tau) = E - e \sin E$$

która określa położenie ciała wzdłuż orbity w chwili $t = 0$ (położenie początkowe). Określona jednoznacznie (modulo okres T).

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Stałą całkowania, niebędącą niezależną całką ruchu, jest czas τ przejścia przez perycentrum mas m_1 i m_2 w równaniu Keplera:

$$\frac{2\pi}{T}(t - \tau) = E - e \sin E$$

która określa położenie ciała wzdłuż orbity w chwili $t = 0$ (położenie początkowe). Określona jednoznacznie (modulo okres T).
Związek między anomalią mimośrodową E a anomalią prawdziwą φ:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

Wektor Hamiltona $\mathbf{K}$

Zachowywany wektor można zdefiniować na różne sposoby, LRL jest tylko jedną z opcji.

Np. z równania ruchu mamy $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, co w połączeniu z $L = r^2\dot{\varphi}$ daje $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{L}\hat{\mathbf{r}}$. Całkując dostaniemy

$$\mathbf{K} = \mathbf{v} - \frac{1}{L}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

który jednak nie wnosi nic nowego ponieważ $\mathbf{L} \times \mathbf{K} = \mathbf{A}$. Zachodzi też $K^2 = 2E + \frac{1}{L^2}$.

Zagadnienie 2 ciał

Mnożąc wektor LRL $(*)$ skalarnie przez $\mathbf{r}$ oraz oznaczając $\varphi = \measuredangle(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ dostaniemy równanie orbity:

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{1 + A\cos\varphi}$$

Z wektora $\mathbf{K}$ też można uzyskać równanie orbity.

Jest to równanie rodziny krzywych stożkowych o $e = A$ oraz parametrze $p = L^2$. Zachodzi oczywiście $e = \sqrt{1 + 2EL^2}$.

Zagadnienie 2 ciał

Mnożąc wektor LRL $(*)$ skalarnie przez $\mathbf{r}$ oraz oznaczając $\varphi = \measuredangle(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ dostaniemy równanie orbity:

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{1 + A\cos\varphi}$$

Z wektora $\mathbf{K}$ też można uzyskać równanie orbity.

Jest to równanie rodziny krzywych stożkowych o $e = A$ oraz parametrze $p = L^2$. Zachodzi oczywiście $e = \sqrt{1 + 2EL^2}$. Łącząc $L = r^2\dot{\varphi}$ z wyrażeniem na $r(\varphi)$ dostaniemy równanie różniczkowe na anomalię prawdziwą:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{L^3}\left(1 + e\cos\varphi\right)^2$$

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego zależnego od prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki też odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ również $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$).

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego zależnego od prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki też odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ również $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$). Analogiem wektora LRL jest zachowywany wektor

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \dot{\mathbf{r}}}{L} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{u}$$

przy czym $\mathbf{J} = \mathbf{A}/L^2$ gdy $a = 0$, oraz zdefiniujmy

$$\mathbf{u} = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} \mathrm{d}\varphi}{(h - a\varphi)^2}$$

gdzie z kolei $h = L + a\varphi$ jest zachowywane (L ani $\mathbf{L}$ nie jest; $\hat{\mathbf{L}}$ jest).

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego zależnego od prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki też odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ również $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$).
Analogiem wektora LRL jest zachowywany wektor

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \dot{\mathbf{r}}}{L} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{u}$$

przy czym $\mathbf{J} = \mathbf{A}/L^2$ gdy $a = 0$, oraz zdefiniujmy

$$\mathbf{u} = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} \mathrm{d}\varphi}{(h - a\varphi)^2}$$

gdzie z kolei $h = L + a\varphi$ jest zachowywane (L ani $\mathbf{L}$ nie jest; $\hat{\mathbf{L}}$ jest).
Przypomnienie: $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$
(tj. $\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}/\mathrm{d}\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\varphi}}/\mathrm{d}\varphi = -\hat{\mathbf{r}}$).

Zad. 0 (*rozgrzewka*) — zagadnienie 2 ciał

1. Wyprowadzić związek $A^2 = 1 + 2EL^2$.
2. Pokazać jawnym rachunkiem, że wektor LRL jest w istocie wielkością zachowywaną.

Zad. 1 (**raport**) — zagadnienie 2 ciał dla nisko latających satelitów

1. Wyprowadzić równanie orbity, tj. zależność $r(\varphi)$. Co gdy $a = 0$?
2. Zapisać równanie orbity w jawnej postaci analitycznej — użycie funkcji Si i Ci. Można się wspomóc np. `sympy` lub WolframAlpha. Co gdy $a = 0$?
3. Określić maks. wartość φ, tj. kiedy nastąpi kolizja z planetą (na podstawie postaci otrzymanych wyrażeń analitycznych z Si i Ci).
4. Narysować orbitę (wykres biegunowy, tj. *polar plot*; całkowanie można wykonać numerycznie używając gotowych bibliotek PYTHON). Przyjąć $0 < A < 1$, $0 < a \ll 1$, $0 < h < 1$.

Zad. 1 (**raport**) — zagadnienie 2 ciał dla nisko latających satelitów

Wskazówki:

Uważać na początkową osobliwość numeryczną (gdy $\varphi \gtrsim 0$) — można się jej pozbyć biorąc całkę w wyrażeniu na $\mathbf{u}$ ze slajdu 12 jako oznaczoną $\int_{\varphi_0}^{\varphi}$, co pozwoli automatycznie włączyć stałą całkowania w warunki początkowe: $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $r(t_0) = r_0$, $\dot{r}(t_0) = v_{r,0}$, $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0$. Ukł. wsp. można WLOG obrócić tak, by $\varphi_0 = 0$, czyli oś x przechodzi przez poł. pocz. Ta zmiana może zmienić wartość liczbową h, ale forma wielkości zachowanej $h = L + a\varphi$ pozostaje niezmieniona. Drugą użyteczną wskazówką jest by ciało zaczęło ruch w perycentrum, tj. $\dot{r}(t_0) = 0$ (czyli prędkość ma niezerową tylko składową transwersalną). Wtedy można powiązać $L_0 \equiv L(t_0)$ z h, tj. wyrazić h przez war. pocz.

Krótko mówiąc — najbezpieczniej jest wyrazić stałe w $\mathbf{u}$ poprzez war. pocz. Przy zmianie całki nieoznaczonej na oznaczoną w wyrażeniu na $\mathbf{J}$ również pojawi się dodatkowy, stały człon zależny od war. pocz.

Cała powyższa procedura polega, w skrócie, na obliczeniu $\mathbf{u}(\varphi) - \mathbf{u}(\varphi_0)$ oraz wyrażeniu wszystkich stałych przez war. pocz.